Přednáška 6, 27. března 2013

Nyní stejnou metodou odhadneme velikost faktoriálu $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Využijeme toho, že $\log n! = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$ a $\log 1 = 0$. Pro rostoucí funkci $f(x) = \log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a dělení $D = (1, 2, \ldots, n)$ intervalu $[1, n]$, $n \geq 2$, máme

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n-1} \log i = \log(n-1)! < \int_1^n f < S(f, D) = \sum_{i=1}^{n-1} \log(i+1) = \log n! \; .$$

Jak jsme kdysi spočítali per partes,

$$\int_1^n f = \int_1^n \log x \; dx = (x \log x - x)|_1^n = n \log n - n + 1 \; .$$

Tedy ($\exp(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ je rostoucí funkce a je inverzní k $\log x$)

$$\exp(n \log n - n + 1) < n! < \exp((n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1)$$

a, pro $n \geq 2$,

$$e \left(\frac{n}{e} \right)^n < n! < e \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \; .$$

Rafinovanějším počítáním s integrály lze odvodit[1] přesnou asymptotiku faktoriálu, tzv. *Stirlingovu formuli*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n , \; n \to \infty \; .$$

Podobně lze odhadovat i nekonečné řady a jejich součty, ale k tomu jsou třeba integrály přes nekonečné intervaly. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, kde $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pro každé $b > a$, položíme

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f \; ,$$

pokud tato limita existuje (povolíme i nevlastní hodnotu limity).

[1] Odvození se najde třeba v mém textu *Kombinatorické počítání* na `http://kam.mff.cuni.cz/~klazar/kpoc99.ps`

Tvrzení (integrální kritérium konvergence). *Nechť a je celé číslo a funkce $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na $[a, +\infty)$ nezáporná a nerostoucí. Pak*

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \cdots < +\infty \iff \int_a^{+\infty} f < +\infty\ .$$

Řada tedy konverguje, právě když konverguje odpovídající integrál.

Důkaz. Posloupnost částečných součtů řady je neklesající a její limita tedy existuje a je vlastní nebo $+\infty$. Díky monotonii f je $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pro každé reálné $b > a$. Díky nezápornosti f je $\int_a^{b'} f \geq \int_a^b f$, jakmile $b' \geq b$. Podobně tedy $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f$ existuje a je vlastní nebo $+\infty$. Pro celé číslo $b > a$ vezmeme dělení $D = (a, a+1, a+2, \ldots, b)$ intervalu $[a, b]$. Máme nerovnosti

$$\sum_{i=a+1}^{b} f(i) = s(f, D) \leq \int_a^b f \leq S(f, D) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i)\ .$$

Z nich je jasné, že omezenost posloupnosti částečných součtů řady implikuje omezenost hodnot integrálů $\int_a^b f$ pro každé reálné $b > a$ a naopak. Obě limity jsou tedy současně vlastní nebo současně $+\infty$. $\square$

V prvním příkladu na aplikaci tohoto kritéria rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ \ s > 0\ .$$

Pro $s \neq 1$ je

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^{+\infty} = (1-s)^{-1}(\lim_{x \to +\infty} x^{1-s} - 1)\ ,$$

což se rovná $+\infty$ pro $0 < s < 1$ a $(s-1)^{-1}$ pro $s > 1$ (proč?). Pro $s = 1$ je

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \log x|_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty\ .$$

Podle integrálního kritéria tedy řada konverguje, právě když $s > 1$. V druhém příkladu rozhodneme o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}\ .$$

Zde

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log x} = \log\log x|_2^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \log\log x - \log\log 2 = +\infty\ .$$

Podle integrálního kritéria tedy řada diverguje. Cvičení: rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n\geq 2} 1/n(\log n)^s$, $s > 1$.

Integrálem jsme faktoriál $n!$ odhadli a nyní ukážeme, opět s pomocí integrálu, jak lze $n!$ rozšířit při zachování rekurence $n! = n\cdot(n-1)!$ na funkci definovanou na celém intervalu $[1,+\infty)$.[2]

Tvrzení (funkce Gamma). *Funkce*

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt :\ [1,+\infty)\to(0,+\infty)$$

splňuje na intervalu $[1,+\infty)$ *funkcionální rovnici*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ .$$

Máme $\Gamma(1) = 1$ *a* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *pro celá čísla* $n \geq 2$.

Důkaz. Ukažme, že $\Gamma(x)$ je korektně definovaná. Pro každé pevné $x \geq 1$ je integrand nezáporná spojitá funkce (pro $x = 1$ a $t = 0$ klademe $0^0 = 1$). Protože $\lim_{t\to+\infty} t^{x-1}e^{-t/2} = 0$ (exponenciála porazí polynom), pro každé $t \in [0,+\infty)$ máme nerovnost

$$t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}\cdot e^{-t/2} \leq ce^{-t/2}\ ,$$

kde $c > 0$ je konstanta závisející jen na x. Integrály přes konečné intervaly $[0,b]$ jsou tedy definované, pro $b \to +\infty$ neklesají a mají vlastní limitu:

$$\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^b ce^{-t/2} = c(1-e^{-b/2}/2)\,dt < c\ .$$

Hodnota $\Gamma(x)$ je tak korektně definovaná pro každé $x \geq 1$. Pro $x = 1$ máme

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = (-e^{-t})|_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1\ .$$

[2]Následující klasická integrální definice funguje na větším intervalu $x \in (0,+\infty)$, ale pro jednoduchost (pro $x < 1$ je nutné integrál i u dolní integrační meze 0 definovat limitou) se omezujeme na menší interval $x \in [1,+\infty)$.

Funkcionální rovnici odvodíme integrací per partes:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = t^x(-e^{-t})|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})\,dt \\ &= 0 - 0 + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= x\Gamma(x)\ .\end{aligned}$$

Hodnoty $\Gamma(n)$ z ní plynou indukcí. □

Ještě tři poznámky k funkci $\Gamma(x)$. Zaprvé, samotné rozšíření faktoriálu vyřešením rekurence $f(x+1) = xf(x)$ nějakou funkcí $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ není nic zázračného a dá se udělat jednoduše i bez integrálů. Vezmeme si funkci f definovanou na $[1,2)$ jako $f(1) = 1$ a jinak úplně libovolně, například jako $f(x) = 1$, a na celý interval $[1,+\infty)$ ji protáhneme právě pomocí vztahu $f(x+1) = xf(x)$. Pro $f = 1$ na $[1,2)$ tak dostaneme $f(x) = x-1$ na $[2,3)$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ na $[3,4)$ a tak dál. Tato funkce splňuje na $[1,+\infty)$ rovnici $f(x+1) = xf(x)$ a $f(1) = 1$, takže i $f(n) = (n-1)!$. Dokonce je na definičním intervalu spojitá. Její graf však nevypadá moc hezky, protože v bodech $2,3,4,\ldots$ má „špičky“ — f v nich nemá derivaci (má různé jednostranné derivace). Pokud navíc po $f(x)$ chceme, aby na $[1,+\infty)$ měla první derivaci, popřípadě i další derivace, tak tato jednoduchá konstrukce nestačí. Pak se musíme obrátit ke $\Gamma(x)$, o níž se dá ukázat, že na $[1,+\infty)$ má derivace všech řádů. Zadruhé, bylo by hezčí mít rozšíření faktoriálu splňující přímo vztah $f(n) = n!$. Z tohoto hlediska je hořejší definice funkce $\Gamma(x)$ trochu nešikovná. Vznikla však historicky, stejně jako název funkce, a již je zavedená (a nelze s tím nic udělat). Zatřetí, jaké jsou nějaké další hodnoty $\Gamma(x)$, kromě bodů $x = 1,2,3,\ldots$? Dá se třeba spočítat, že

$$\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.8862\ldots\ .$$

Funkce $\Gamma(x)$ splňuje řadu dalších zajímavých vztahů a identit.

Jako závěrečnou aplikaci integrálu připomeneme vzorce pro plochu, délku křivky a objem rotačního tělesa. Plochu rovinného útvaru $U(a,b,f)$ (jsou to body (x,y) v rovině splňující $a \le x \le b$ a $0 \le y \le f(x)$) pod grafem funkce f jsme víceméně definovali jako $\int_a^b f$.

Pro funkci $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ můžeme délku jejího grafu $G = \{(x,f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}$ jakožto oblouku křivky definovat jako limitu délek lomených čar L spojujících konce G a s body zlomu na G, když délka nejdelší úsečky v L jde k 0. Když je f pěkná funkce, například f' je spojitá, tato limita existuje a můžeme ji spočítat R. integrálem. Úsečka v L spojující body $(x, f(x))$ a $(x+\Delta, f(x+\Delta))$ má podle Pythagorovy věty délku

$$\sqrt{\Delta^2 + (f(x+\Delta) - f(x))^2} = \Delta\sqrt{1 + \left(\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}\right)^2}\ ,$$

a hodnota zlomku je podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě rovna $f'(\alpha)$ v nějakém mezibodě α (ležícím mezi x a $x+\Delta$). Délka lomené čáry L tak je vlastně přímo Riemannova suma pro jisté dělení intervalu $[a,b]$ s body a funkci $\sqrt{1+(f'(t))^2}$. Dostáváme následující vzorec.

Tvrzení (délka oblouku křivky). *Nechť $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci f' (takže $\sqrt{1+(f')^2} \in \mathcal{R}(a,b)$). Pak*

$$\text{délka}(\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt\ .$$

Pro podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^3$ trojrozměrného prostoru můžeme její objem definovat jako limitu, pro $n \to \infty$, součtu objemů $1/n^3$ krychliček K v množině

$$\{K = [\tfrac{a}{n}, \tfrac{a+1}{n}] \times [\tfrac{b}{n}, \tfrac{b+1}{n}] \times [\tfrac{c}{n}, \tfrac{c+1}{n}] \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\ \&\ K \subset M\}\ .$$

Je-li M hezká, tato limita existuje a můžeme ji spočítat integrálem. Uvedeme si jeden speciální případ.

Tvrzení (objem rotačního tělesa). *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $f \ge 0$ na $[a,b]$. Pro objem rotačního tělesa*

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b\ \&\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\}$$

vzniklého rotací (v $\mathbb{R}^3$) rovinného útvaru $U(a,b,f)$ pod grafem funkce f kolem osy x platí vztah

$$\text{objem}(V) = \pi \int_a^b f(t)^2\, dt\ .$$

Vzorec se dostane rozřezáním V rovinami kolmými na osu x na plátky tloušťky $\Delta > 0$ a sečtením jejich objemů. Objem plátku mezi rovinami kolmými v bodech $(x, 0, 0)$ a $(x + \Delta, 0, 0)$ je přibližně $\pi f(x)^2\Delta$, neboť to je zhruba válec s (kruhovou) podstavou o poloměru $f(x)$ a výškou Δ.

Cvičení: pomocí prvního vzorce spočtěte délku obvodu kružnice a pomocí druhého objem koule.

Diferenciální počet funkcí několika proměnných

Budeme pracovat v m-rozměrném *euklidovském prostoru* $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, což je množina všech uspořádaných m-tic reálných čísel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ s $x_i \in \mathbb{R}$. Je to m-rozměrný vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ — jeho prvky můžeme mezi sebou sčítat a odečítat a skalárně je násobit reálnými čísly. Vzdálenosti v $\mathbb{R}^m$ měříme pomocí *(euklidovské) normy*, což je zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ dané formulí

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}\ .$$

Vlastnosti normy ($a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^m$):

1. (nezápornost a nenulovost) $\|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0 \iff x = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$,
2. (homogenita) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ a
3. (trojúhelníková nerovnost) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Z normy dostáváme *(euklidovskou) vzdálenost* $d(x, y) :\ \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to [0, +\infty)$ mezi dvěma body x a y v $\mathbb{R}^m$:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_m - y_m)^2}\ .$$

Vlastnosti vzdálenosti ($x, y, z \in \mathbb{R}^m$):

1. (nezápornost a nenulovost) $d(x, y) \geq 0$ a $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. (symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ a
3. (trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Až na trojúhelníkovou nerovnost, jejíž důkaz dá trochu práci, jsou všechny vlastnosti normy i vzdálenosti zřejmé z definice.

(Otevřená) koule $B(s, r)$ s poloměrem $r > 0$ a středem $s \in \mathbb{R}^m$ je množina bodů v $\mathbb{R}^m$ se vzdáleností od s menší než r:

$$B(s, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - s\| < r\} \ .$$

Otevřená množina v $\mathbb{R}^m$ je podmnožina $M \subset \mathbb{R}^m$ s tou vlastností, že s každým svým bodem x obsahuje i nějakou kouli se středem v x:

$$M \text{ je otevřená} \iff \forall x \in M \ \exists r > 0 : \ B(x, r) \subset M \ .$$