6. přednáška z MA II, 22. 3. 2007

Věta 1.12* (2. ZVA ještě jednou)

Nechť $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ Riemannův integrál a primitivní funkci F, tj. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Potom $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

D. Nechť $D = a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$ je dělení $[a,b]$. Podle Lagrangeovy věty o stř. hodnotě na každém intervalu $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ máme
$F(a_{i+1}) - F(a_i) = F'(c_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) = f(c_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)$ pro nějaké $c_i \in (a_i, a_{i+1})$. Tedy

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \inf_{I_i} f \le F(a_{i+1}) - F(a_i) \le (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup_{I_i} f.$$

Sečtením přes $i = 0, 1, \dots, k-1$ dostaneme nerovnosti

$$s(f,D) \le \sum_{i=0}^{k-1} F(a_{i+1}) - F(a_i) = F(b) - F(a) \le S(f,D).$$

Protože $f \in \mathcal{R}[a,b]$, máme $\sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) = \int_a^b f$, tedy i $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

$\boxtimes$

Odhady konečných sum pomocí integrálů

• $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty$ pro $n \to \infty$,

protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, ale jak vychle? S_n odhadneme pomocí integrálů.

$$\frac{1}{k} \doteq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_k^{k+1} = \log \frac{k+1}{k} = \log(1+1/k)$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \dots$$ (Taylorův rozvoj logaritmu, platí pro $k \geq 1$)

Takže pro $I_k = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}$ máme pro $k \in \mathbb{N}$ nerovnosti

$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} < I_k < \frac{1}{k}$. Pro sčítanec $1/k$ odtud dostaneme

$$I_k < \frac{1}{k} < I_k + \frac{1}{2k^2}.$$ Protože, podle V.1.10,

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1),$$

máme $\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$$\boxed{\log n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \log n + \frac{1}{n} + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$(\log(n+1) = \log n + \log(1+\frac{1}{n}) = \log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \dots$

$< \log n + \frac{1}{n}$), $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} < 1$).

- Stirlingova formule odhaduje $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ pro $n \to \infty$: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (tj. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$). Odvodíme slabší formu S. formule ve tvaru $n! = \Theta(n)\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, kde $0 < c_1 < \Theta(n) < c_2$ pro $\forall n$ a $0 < c_1 < c_2$ jsou nějaké konstanty.

$$\log(n!) = \underbrace{\log 1}_{=0} + \log 2 + \cdots + \log n = \sum_{k=2}^{n}\log k,$$

$$\log k \doteq \int_{k-1}^{k}\log x\cdot dx = \left[x\log x - x\right]_{k-1}^{k}$$

$$= k\cdot\log k - k - (k-1)\log(k-1) + (k-1)$$

$$= (k-1)\log\frac{k}{k-1} + \log k - 1$$

$$= (k-1)\log\left(1+\frac{1}{k-1}\right) + \log k - 1$$

$$= (k-1)\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2(k-1)^2} + \frac{1}{3(k-1)^3} - \cdots\right) + \log k - 1$$

$$= \log k - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{3(k-1)^2} - \cdots.$$ Pro $I_k = \int_{k-1}^{k}\log x\cdot dx$ tak pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, dostáváme nerovnosti

$$\log k - \frac{1}{2(k-1)} < I_k < \log k - \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{3(k-1)^2},$$

tedy $I_k + \frac{1}{2(k-1)} - \frac{1}{3(k-1)^2} < \log k < I_k + \frac{1}{2(k-1)}$. Sečtením pro $k = 2, 3, \dots, n$ dává nerovnosti $\left(\sum_2^n I_k = \int_1^n \log x \cdot dx = [x \log x - x]_1^n = n \log n - n + 1 \right)$

$$n \log n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3(k-1)^2} < \log(n!) <$$

$$< n \log n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)}.$$

Z předchozího výpočtu víme, že $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > \frac{1}{2} \log n$ a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2(k-1)} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \frac{1}{2} \log n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)$ $(n \geq 2)$ a že $\sum_{k=2}^n \frac{1}{3(k-1)^2} < \frac{1}{3} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{18} < 0.6$. Tedy

$$\boxed{n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + 1 - 0.6 < \log(n!) < n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + 1 + \frac{3}{4},\ n \geq 2.}$$

Po odlogaritmování, položením $n! = e^{\log(n!)}$, dostaneme odhad

$\boxed{n! = \Theta(n)\cdot\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$, kde $\Theta(n)$ pro $\boxed{n \geq 2}$ splňuje nerovnosti $e^{0.4} < \Theta(n) < e^{1.75}$,

to jest $\boxed{1.49 < \Theta(n) < 5.76.}$

Přesnějším počítáním s integrály se dá ~~[illegible]~~ odvodit, že $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O(1/n)$, $n \to \infty$, kde

$\gamma = 0.57721\ldots$ je tzv. Eulerova–Mascheroniova konstanta, o níž není známo, zda je iracionální number.

Též se dá spočítat, že $\Theta(n) \to \sqrt{2\pi} \doteq$ ~~[illegible]~~ 2.51.

Definování funkcí pomocí integrálů • logaritmus

Funkci $\log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ jsme ~~[illegible]~~ definovali jako inverz k exponenciále $\exp(x) : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, kterou jsme si zavedli jako $\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, popř. jako

$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$. Je ale možný i opačný postup, $\log x$ má přirozenou definici pomocí integrálu:

$\boxed{\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}. \quad (x>0)}$ Základní vlastnosti logaritmu

odtud hned plynou: $\log 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \underbrace{\int_1^{1+x} \frac{dt}{t}}_{} = \dots = \underline{1}$$

$$\left(\underbrace{\frac{x}{1+x}}_{} = (1+x-1)\cdot \inf_{[1,1+x]} \frac{1}{t} < \bullet < (1+x-1)\cdot \sup_{[1,1+x]} \frac{1}{t} = \frac{x}{1} \right)$$

(pro $x>0$, pro $x<0$ podobně)

a podle V. 1.10 a jejího důsledku

pro $x, y > 0$ podle věty o substituci máme

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \quad \left| \begin{array}{l} t = xu \\ dt = x\cdot du \end{array} \right.$$

$$= \log x + \int_1^y \frac{x\cdot du}{x\cdot u} = \log x + \int_1^y \frac{du}{u} = \log x + \log y.$$

Takže $\boxed{\log 1 = 0, \ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \log(xy) = \log x + \log y}$

- <u>rozšíření funkce faktoriál na $[0,+\infty)$</u>

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

Chceme funkci $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ takovou, že $f(0) = 1$ a $\forall\, x \geq 1$ platí $f(x) = x \cdot f(x-1)$. Pak $f(n) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\boxed{f(x) := \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt}$$

Pro $x=0$ máme $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0-(-1) = 1$.

Pro $x > 0$ není těžké ukázat, že $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt$ je vždy vlastní, takže máme opravdu funkci $f(x)$.

Pro $x \geq 1$ podle integrace per partes máme

$$f(x) = \int_0^{+\infty} t^x \cdot (-e^{-t})'\, dt = \underbrace{\left[t^x(-e^{-t})\right]_0^{+\infty}}_{0-0=0} - \int_0^{+\infty} (t^x)'(-e^{-t})\, dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt =$$

$= x \cdot f(x-1)$. Opravdu $\boxed{f(x) = x \cdot f(x-1) \text{ pro } x \geq 1.}$

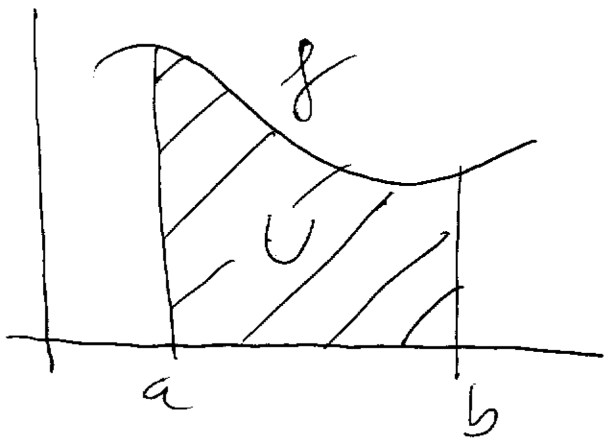
Je to tzv. gama funkce zavedená Eulerem,

$$\boxed{\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt}$$

velké γ

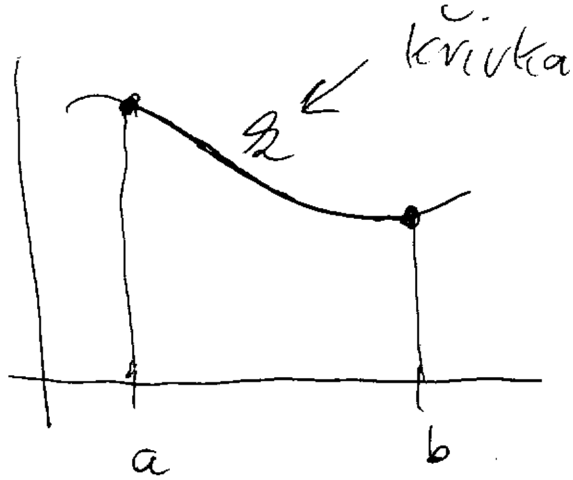
(posun x o -1 je z historických důvodů)

Plocha, délka křivky, objem (rotačního tělesa)



$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$

$$\boxed{\text{plocha}(U) = \int_a^b f.}$$

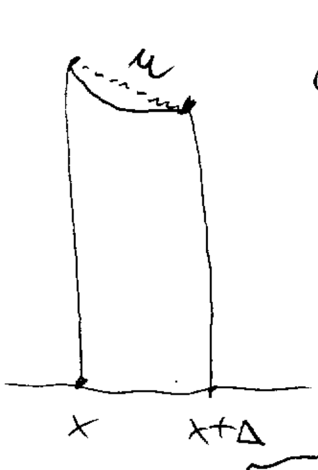


$k = \cancel{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2}$

$= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b\}.$

$\text{délka}(k) = ?$

Předpokládejme, že f má na $[a,b]$ spojitou první derivaci.



délka úsečky u spojující body $(x, f(x))$ a $(x+\Delta, f(x+\Delta))$ je

$$\sqrt{(x+\Delta-x)^2 + (f(x+\Delta)-f(x))^2} =$$

$$= \Delta\sqrt{1+\left(\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}\right)^2} \quad (\Delta > 0)$$

Lagrange:

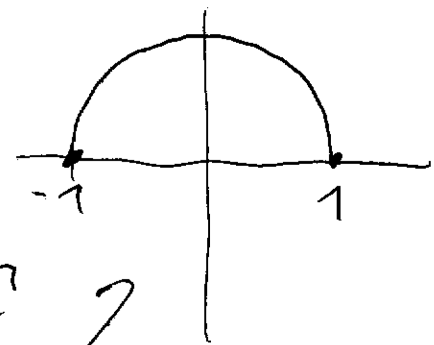
$$= \Delta\sqrt{1+(f'(c))^2} \quad \text{pro nějaké } c,\ x < c < x+\Delta.$$

Odtud se dá odvodit, že rozumná definice délky křivky $\mathcal{Z}$ je

$$\boxed{\text{délka}(\mathcal{Z}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\, dt}$$

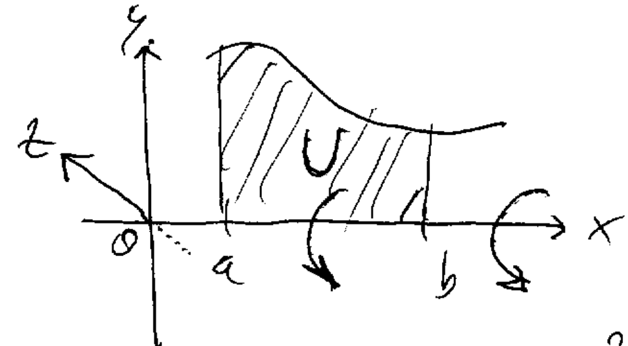
(předpokládám, že f' je spojitá na $[a,b]$)

Cvičení 9 Co se stane, když takto budeme počítat délku půlkružnice



, tj. $[a,b]=[-1,1]$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$?

<u>Rotační těleso</u>



Útvar U rotujeme kolem osy x. V $\mathbb{R}^3$ pak vznikne (rotační) těleso

$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a \le x \le b, \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\}$. Není těžké vidět, že rozumná definice objemu tělesa T je

$$\boxed{\text{objem}(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx.}$$