Přednáška 5, 30. října 2019

Baireova věta. Perfektní množiny. Kapitola 2. Druhy konvergence posloupností funkcí

Baireova věta. Úplné prostory nemají „díry“ a jsou bohaté na body. Banachova věta o pevném bodu třeba říká, že každá rovnice $f(x) = x$ s kontrahujícím zobrazením f úplného prostoru do sebe má řešení. Baireova věta popisuje bohatost úplných prostorů z jiného úhlu: úplný prostor se nedá vyčerpat ne zcela často se vyskytujícími body. Pro její formulaci budeme potřebovat dva nové pojmy. První jsou ony „ne zcela často se vyskytující body“. Množina $X \subset M$ v obecném metrickém prostoru (M, d) je *řídká* (angl. *meager*), pokud

$$\forall \text{kouli } B \subset M \ \exists \text{koule } B' \subset B: \ B' \cap X = \emptyset \ .$$

Druhým novým pojmem je, pro $a \in M$ a reálné $r > 0$, *uzavřená koule* $\overline{B}$ *(se středem a a poloměrem r)*,

$$\overline{B} = \overline{B}(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) \le r\} \ .$$

Jediný rozdíl oproti obyčejné kouli je, že v $\overline{B}$ jsou i body se vzdáleností od a přesně rovnou r. Snadno se vidí, že $\overline{B}$ je uzavřená množina (úloha 1), $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$ a že pro každé kladné $s < r$ je $\overline{B}(a,s) \subset B(a,r)$ (úloha 2).

Věta (R.-L. Baire, 1899). *Nechť (M, d) je úplný metrický prostor a $X_n \subset M$ pro $n \in \mathbb{N}$ jsou řídké množiny. Pak*

$$M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ne \emptyset \ .$$

Úplný metrický prostor tedy nikdy není nejvýše spočetným sjednocením řídkých množin (úloha 3).

Důkaz. Sestrojíme posloupnost takových uzavřených koulí

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \overline{B}_3 \supset \dots, \overline{B}_n = \overline{B}(a_n, r_n) \ ,$$

že (i) $\overline{B}_n \cap X_n = \emptyset$ a (ii) $\lim r_n = 0$. Ta dává bod $a \in M$ neležící v žádné z množin X_n. Posloupnost středů $(a_n) \subset M$ je totiž cauchyovská ($m, n \ge n_0 \Rightarrow a_m, a_n \in \overline{B}_{n_0}$, tedy $d(a_m, a_n) \le 2r_{n_0}$) a její limita $a = \lim a_n \in M$ nutně leží v každé $\overline{B}_n$ ($n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in \overline{B}_{n_0}$, takže $\lim a_n \in \overline{B}_{n_0}$ podle úlohy 1). Tedy $a \notin X_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Uvedeme definici takové posloupnosti uzavřených koulí. Nechť $B_1 \subset M$ je libovolná koule a $B_1' \subset B_1$, $B_1' = B(a_1, r_1')$, je její podkoule disjunktní s X_1. Položíme $\overline{B_1} = \overline{B}(a_1, r_1)$, kde $r_1 = r_1'/2$. Pak jistě (podle úlohy 2) $\overline{B_1} \subset B_1'$ a tedy je $\overline{B_1}$ disjunktní s X_1. Řekněme, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $i = 1, 2, \ldots, n$ již máme definované uzavřené koule

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \cdots \supset \overline{B}_n,\ \overline{B}_i = \overline{B}(a_i,\, r_i)\ ,$$

že $\overline{B}_i \cap X_i = \emptyset$ a (pro $i < n$) $r_{i+1} \leq \frac{r_i}{2}$. Uzavřenou kouli $\overline{B}_{n+1}$ definujeme následovně. Díky řídkosti množiny X_{n+1} existuje koule $B_{n+1}' = B(a_{n+1}, r_{n+1}') \subset B(a_n, r_n) \subset \overline{B}_n$ disjunktní s X_{n+1}. Položíme

$$\overline{B}_{n+1} = \overline{B}(a_{n+1},\, r_{n+1}),\ r_{n+1} = \min(r_{n+1}'/2,\, r_n/2)\ .$$

Lehce se vidí, že $\overline{B}_{n+1}$ je obsažená v B_{n+1}', tedy i v $\overline{B}_n$, a je tedy disjunktní s X_{n+1}. Zřejmě i $r_{n+1} \leq r_n/2$. Je jasné, že takto definovaná posloupnost vnořených uzavřených koulí $(\overline{B}_n)$ má vlastnosti (i) a (ii). □

Nejznámější aplikací Baireovy věty je důkaz existence spojité funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která pro žádné $a \in [0,1]$ nemá vlastní derivaci $f'(a)$ (pro $a = 0$ nebo 1 jednostrannou). Snad se k němu dostaneme ve druhé kapitole. První kapitolu zakončíme jednodušší aplikací.

Důsledek (o perfektních množinách). *Každá neprázdná a nejvýše spočetná uzavřená množina $X \subset \mathbb{R}$ má izolovaný bod (úloha 4). Platí to vlastně pro každý úplný prostor (M, d) namísto $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, d_2)$.*

Důkaz. Nechť podmnožina $X \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, uzavřená a nemá izolované body; následující argument funguje v každém úplném prostoru, ale pro konkrétnost si představujeme $\mathbb{R}$. Dokážeme, že X je nespočetná. Podle úlohy 15 v minulé přednášce je euklidovský podprostor X úplný. Stačí ukázat, že pro každé $a \in X$ je jednoprvková množina $\{a\}$ řídká (v X). Podle Baireovy věty pak sjednocení

$$X = \bigcup_{a \in X} \{a\}$$

nemůže být spočetné. Nechť tedy $a \in X$ a $B = B(b, r) \subset X$ s $b \in X$ je libovolná koule v prostoru X. Pokud $b \neq a$, pak každá podkoule $B' \subset B$,

$B' = B(b, s)$ s $s = \min(r, d(b, a) = |b - a|)$ je disjunktní s $\{a\}$ ($a \notin B'$). Nechť $b = a$. Protože a není izolovaný bod množiny X, existuje bod $c \in X \cap B(a, r)$, $c \neq a$. Položíme $B' = B(c, s)$ s $s = \min(d(c, a), r - d(c, a))$ (jsme-li v $\mathbb{R}$, opět $d(c, a) = |c - a|$) a lehce se vidí, že $B' \subset B$ a $a \notin B'$. Každá jednoprvková množina $\{a\}$, $a \in X$, tak je v X řídká. $\square$

Podmnožina metrického prostoru je *perfektní*, je-li uzavřená a nemá-li izolované body. Důsledek tedy praví, že v úplném metrickém prostoru je každá neprázdná perfektní množina nespočetná.

Kapitola 2: posloupnosti a řady funkcí

V *Matematické analýze I* jsme zkoumali limity $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ reálných posloupností $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a součty $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jim odpovídajících nekonečných řad, což jsou limity $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ posloupností částečných součtů. V této kapitole se budeme zabývat zobecněním, kdy místo jediné posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je dána parametrická množina $(a_n(x)) \subset \mathbb{R}$, $x \in M \subset \mathbb{R}$ (v této kapitole M označuje neprázdou množinu reálných čísel) těchto posloupností. Pro každý prvek $x \in M$ je tedy dána reálná posloupnost $(a_n(x))$ nebo ekvivalentně, nahlíženo z druhé strany, pro každý index $n \in \mathbb{N}$ je dána funkce $a_n\colon M \to \mathbb{R}$. Budeme zkoumat, jak limita $a = a(x)$ či součet $s = s(x)$ závisí na $x \in M$. Místo a_n ale budeme raději psát symbol f_n, který jasně evokuje funkci.

Tři druhy konvergence posloupností funkcí. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f_n, f\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou na ní definované funkce. Funkce f_n *na množině M bodově konvergují k funkci f*, symbolicky zapsáno

$$f_n \to f \text{ na } M\ ,$$

pokud pro každé $x \in M$ je $\lim f_n(x) = f(x)$. Jinými slovy,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \forall\, x \in M\; \exists\, n_0 = n_0(x) \in \mathbb{N} :\; n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(přesný symbolický překlad slovní definice by měl mít $\forall\, x \in M\; \forall\, \varepsilon > 0 \ldots$, ale z logického hlediska na pořadí kvantifikátorů stejného druhu nezáleží a toto pořadí je vhodnější kvůli následující definici). Index n_0 obecně závisí na zvoleném $x \in M$, což jsme zachytili značením $n_0 = n_0(x)$. Vlastně je tak dána funkce $n_0\colon M \to \mathbb{N}$, která může být i neomezená, kdy některá

„špatná“ x vyžadují větší a větší hodnoty n_0. Úplně přesně bychom měli psát $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, protože n_0 obecně závisí i na ε a máme tak vlastně funkci $n_0\colon (0, +\infty) \times M \to \mathbb{N}$, ale ε bereme pro tuto úvahu jako pevné.

Pokud je funkce $n_0(x)$ konstantní a jediné n_0 se hodí pro každé $x \in M$, mluvíme o *stejnoměrné konvergenci*. V logické řeči to zachytíme výměnou pořadí druhého a třetího kvantifikátoru v hořejší formuli:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall x \in M:\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Pak řekneme, že funkce f_n *na množině M stejnoměrně konvergují k funkci* f a píšeme

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M\ .$$

Z praktického hlediska (v aplikacích stejnoměrné konvergence) je často užitečné omezení konstantnosti funkce $n_0\colon M \to \mathbb{N}$ zeslabit a vyžadovat ho jen lokálně. Řekneme, že funkce f_n *na množině M lokálně stejnoměrně konvergují k funkci* f a píšeme

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } M\ ,$$

když pro každé $x \in M$ existuje $\delta > 0$, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M \cap (x - \delta, x + \delta)$.

Příklad s mocninami. Položíme $M = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = 0$ pro $0 \leq x < 1$ a $f(1) = 1$. Je jasné, že $f_n \to f$ na $[0, 1]$. Všimněte si, že i když jsou všechny funkce f_n spojité, jejich bodová limita f spojitá není. Není ani těžké vidět, že tato konvergence není stejnoměrná. Protože pro každé pevné $n \in \mathbb{N}$ je $\lim_{x \to 1^-} x^n = 1$, můžeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolit bod $a_n \in (0, 1)$, že $f(a_n) = a_n^n > \frac{1}{2}$ (nebo že $f(a_n) > c$ pro jakoukoli jinou konstantu $c \in [0, 1)$, třeba $c = 0.99999$). Pak ale pro žádné kladné $\varepsilon < \frac{1}{2}$ neexistuje ani jeden index n, že

$$\forall x \in M:\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,$$

protože pro $x = a_n \in M$ se tato absolutní hodnota rovná $|f_n(a_n) - f(a_n)| = f_n(a_n) > \frac{1}{2}$. Tedy $f_n \not\rightrightarrows f$ na $M = [0, 1]$. Dobře známá limita

$$\lim\,(1 - n^{-1})^n = e^{-1} > 3^{-1}$$

ukazuje, že stačí, aby se a_n blížily ke špatnému bodu 1 „rychlostí“ $\frac{1}{n}$.

Úlohy

1. Dokažte, že každá uzavřená koule je uzavřená množina.

2. Dokažte, že pro každé $a \in M$ a každé kladné $s < r$ je $\overline{B}(a, s) \subset B(a, r)$.

3. Znění Baireovy věty uvádí spočetné sjednocení $\bigcup_{n=1}^{\infty}$. Jak odtud (čistě formálně) plyne, že věta platí i pro konečná sjednocení?

4. Zde je pokus o konstrukci spočetné uzavřené množiny $X \subset \mathbb{R}$ bez izolovaných bodů. Nechť $X_0 = \{0\}$. To je uzavřená a nejvýše spočetná množina, ale má izolovaný bod. Nechť $X_1 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Množina $X_0 \cup X_1$ je patrně spočetná a uzavřená a žádný bod v X_0 není izolovaný. Ovšem každý bod v X_1 je izolovaný. Ale ke každému $b \in X_1$ můžeme podobně přidat posloupnost konvergující k b. Nechť X_2 je sjednocení těchto posloupností přes všechny $b \in X_1$. Pak $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ je spočetná a uzavřená množina a žádný bod v $X_0 \cup X_1$ není izolovaný. Podobně můžeme odstranit izolovanost bodů v X_2 přidáním spočetné množiny X_3 a tak dále. Výsledně je množina $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ spočetná a uzavřená a žádný její bod není izolovaný. To ale protiřečí Baireově větě. Kde je chyba?

5. Dokažte, že sjednocení dvou řídkých množin je řídká množina.

6. Je řídkost množiny absolutní nebo relativní vlastnost?

7. Pro metrický prostor (M, d) množinu $X \subset M$ nazveme *hustou (v M)*, když pro každou kouli $B \subset M$ je $X \cap B \neq \emptyset$. Je pravda, že doplněk řídké množiny je hustá množina?

8. Je pravda, že doplněk husté množiny je řídká množina?

9. Je průnik dvou hustých množin hustá množina?

10. Nechť $f_n(x) = x^n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, a f je bodová limita funkcí f_n (tj. $f(x) = 0$ pro $0 \leq x < 1$ a $f(1) = 1$). Dokažte, že množina $S = \{X \subset [0, 1] \mid X \neq \emptyset, f_n \rightrightarrows f \text{ na } X\}$ nemá maximální prvek vzhledem k inkluzi (pro posloupnost (f_n) tedy neexistuje největší obor stejnoměrné konvergence). Co jsou minimální prvky?