5. přednáška z MA I, 15. 3. 2007

Důkaz V.1.11. $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f$ pro $x \in [a,b]$. Nechť $x_0 \in [a,b]$ je pevné a $x \in [a,b]$ splňuje $|x - x_0| < \delta$ pro malé $\delta > 0$. Pak

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{V.1.10, důsledek}}}{=} \left| \int_{x_0}^x f \right| \le |x - x_0| \cdot \sup_I |f|,$$

kde I je interval s krajními body x a x_0. Protože $|f| < C$ na $[a,b]$ (f je integrovatelná a tedy omezená), máme $|F(x) - F(x_0)| < \delta C$. Tedy $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow$
$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, F je spojitá v x_0.

Nechť je navíc f spojitá v x_0. Pro dané $\varepsilon > 0$ pak ex. $\delta > 0$, že $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \inf_I f > f(x_0) - \varepsilon$ a $\sup_I f < f(x_0) + \varepsilon$. Pro $x > x_0$ (případ $x < x_0$ je podobný) máme

$$\cancel{\frac{1}{x-x_0}} \cdot \cancel{(x-x_0)} \inf_I f \le \underbrace{\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} f}_{= \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}} \le \cancel{\frac{1}{x-x_0}} \cancel{(x-x_0)} \sup_I f.$$

Takže, pro $x \in P(x_0, \delta)$,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Tedy $F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. ☒

Zobecnění V. 1.12 na funkce s konečně mnoha body nespojitosti. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funkce $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ je <u>zobecněnou primitivní funkcí k f na $[a,b]$</u>, když

- $F'(x) = f(x)$ platí pro $\forall x \in [a,b]$ až na kon. mnoho bodů
- <u>F je spojitá</u> (to jsem zapomněl říci na přednášce)

$\boxed{\text{V. 1.12}'}$ Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{a omezená}}$ spojitá na $[a,b]$ až na konečně mnoho bodů, pak má na $[a,b]$ zob. prim. funkci F a pro každou takovou funkci F máme

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

<u>D.</u> $f \in \mathcal{R}[a,b]$ podle Lebesgueovy věty. Dále $F(x) = \int_a^x f$ je zob. prim. fce k f podle V. 1.11. Dále se každé dvě zob. prim. funkce liší jen o konstantu (to by bez předpokladu jejich spojitosti neplatilo).

Je-li F libovolná zob. prim. funkce, máme tedy

$$F(x) = \int_a^x f + C \quad a \quad F(b) - F(a) = \dots = \int_a^b f. \qquad \boxtimes$$

Funkce $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ má na (a,b) <u>Newtonův integrál</u>, když má na (a,b) prim. funkci F a ta má vlastní jednostranné limity $L = \lim_{x \to b^-} F(x)$ a $K = \lim_{x \to a^+} F(x)$. Tento integrál pak definujeme jako

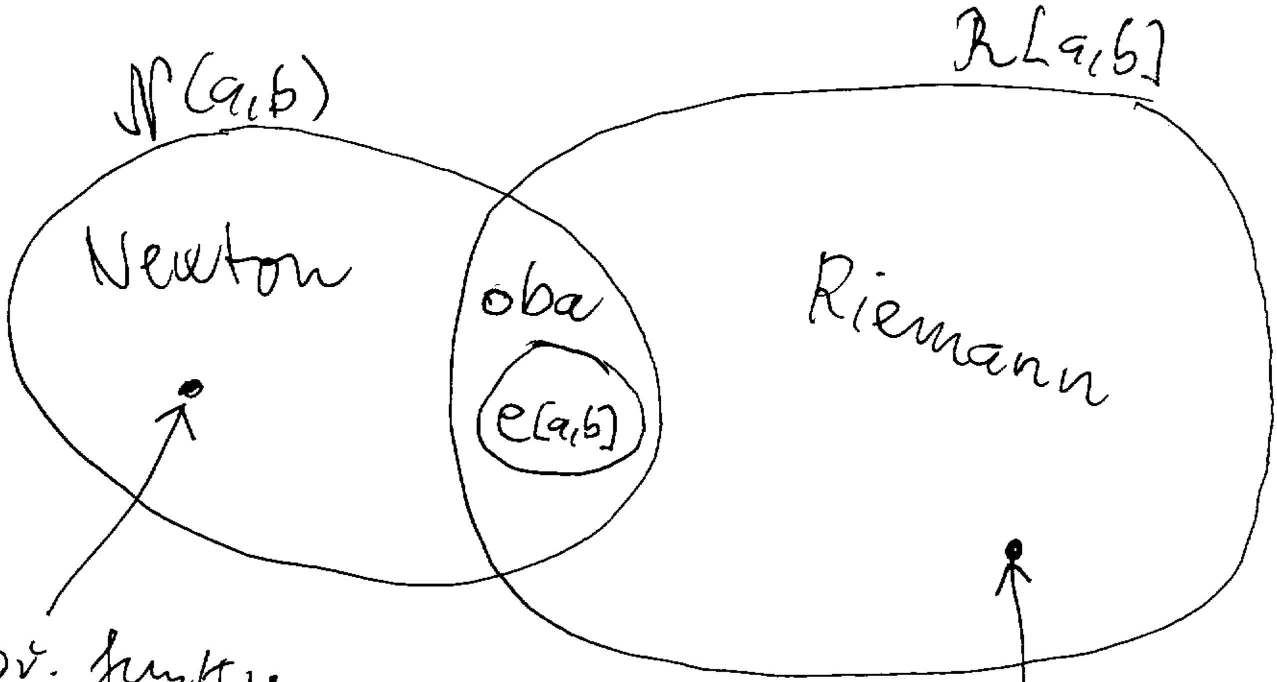
$$(N) \int_a^b f(t)\,dt := L - K = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

(protože každé 2 prim. fce se liší jen o konstantu, N. integrál nezávisí na volbě F).

$\mathcal{N}(a,b) = \{f : f$ má na (a,b) Newtonův integrál$\}$.

Připomeňme si, že $\mathcal{R}[a,b] = \{f : f$ má na $[a,b]$ Riemannův integrál$\}$ a

$\mathcal{C}[a,b] = \{f : f$ je na $[a,b]$ spojitá$\}$. V. 1.12 říká, že $\mathcal{C}[a,b] \subset \mathcal{N}(a,b) \cap \mathcal{R}[a,b]$ a pro $f \in \mathcal{C}[a,b]$ máme $(N)\int_a^b f = (R)\int_a^b f$.



např. funkce $\frac{1}{\sqrt{x}} : (0,1] \to \mathbb{R}$ má N. integrál $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$, ale není na $(0,1)$ omezená, takže není v $\mathcal{R}[0,1]$ (bez ohledu na to, jak ji dodefinujeme v 0).

např. funkce $\operatorname{sgn} : [-1,1] \to \mathbb{R}$, která je v $\mathcal{R}[-1,1]$ (je omezená a má jen jeden bod nespojitosti), ale nemá N. integrál, protože nemá prim. funkci (nemá totiž Darbouxovu vlastnost).

Lze sestrojit omezenou funkci $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ takovou, že $f \in \mathcal{N}(0,1) \setminus \mathcal{R}[0,1]$

$\boxed{\text{Věta 1.13}}$ (počítání R.-ova integrálu per partes a substitucí)

a) Funkce $f, g, f', g' : [a,b] \to \mathbb{R}$ buďte spojité na $[a,b]$. Potom
$$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'.$$

V b) a c) máme funkce $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ nebo $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.

---

b) φ a φ' jsou spojité na $[\alpha,\beta]$, f je spojitá na $[a,b]$. Pak

$$(*) \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx \left(= \begin{cases} \int_a^b f \\ \int_b^a f \end{cases} \right).$$

c) φ a φ' jsou spojité na $[\alpha,\beta]$, φ je na $[\alpha,\beta]$ rostoucí nebo klesající, $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pak opět platí rovnost $(*)$.

<u>D.</u> a) $f'g$ i fg' jsou spojité na $[a,b]$, takže oba

integrály existují. Podle Leibnizovy formule, $(fg)' = f'g + fg'$ na $[a,b]$. Tedy, podle V.1.12, $\int_a^b (f'g + fg') = fg\big|_a^b$, tedy $\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = fg\big|_a^b$.

b) Podle vzorce pro derivaci složené funkce na $[\alpha,\beta]$ máme $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, kde F je funkce primitivní k f na $[a,b]$ (F existuje, protože f je spojitá). Opět podle V.1.12,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\cdot\varphi' \underset{\substack{\uparrow\\ V.1.12}}{=} F(\varphi)\Big|_\alpha^\beta = F\Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \underset{\substack{\uparrow\\ V.1.12}}{=} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

c) Lze dokázat z definice R.-ova integrálu pomocí R.-ových sum $R(f(\varphi)\cdot\varphi', D, C)$, nebudeme to podrobně dělat. $\boxtimes$

Aplikace Riemannova integrálu

1) Integrál a nekonečné i konečné součty

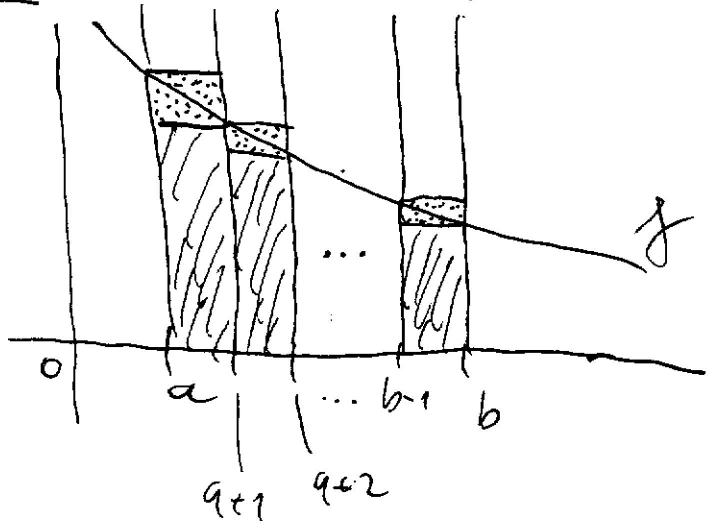
$a \in \mathbb{R}$, $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ pro každé $b \geq a$. ~~Často~~ Definujeme $\int_a^{+\infty} f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$.

7

$\boxed{\text{Tvrzení 1.14}}$ (integrální kritérium konvergence řad)

$a \in \mathbb{N}$, $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí. Pak řada $\sum_{n=a}^{\infty} f(n) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \dots$ konverguje $\iff \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

D. Nechť $b \in \mathbb{N}$, $b \geq a$.



Vyšrafovaná plocha $= f(a+1) + f(a+2) + \dots + f(b) \leq \int_a^b f$. Podobně vyšr. a vytečkovaná plocha dohromady $= f(a) + f(a+1) + \dots + f(b-1) \geq \int_a^b f$. Implikace $\Rightarrow$. Když $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ konverguje, je posl. částečných součtů $\sum_{n=a}^{b} f(n)$ shora omezená. Podle druhé nerovnosti je tedy i funkce $F(b) = \int_a^b f$ shora omezená (pro $b \in [a, +\infty)$). Tedy existuje vlastní limita $\lim_{b \to +\infty} F(b)$ (F je neklesající).

Implikace $\Leftarrow$. (Dokážeme kontrapozici implikace)
Když $\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$ diverguje, tj. $\lim_{b\to\infty} \sum_{n=a}^{b} f(n) = +\infty$ ($f \geq 0$), první nerovnost ukazuje, že i $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = +\infty$. $\boxtimes$

Příklady na použití int. kritéria

- Nechť $s > 0$, pak
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^{+\infty} \text{ pro } s \neq 1$$
$$= \left[\log x\right]_1^{+\infty} \text{ pro } s = 1$$
$$\leadsto \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } s \leq 1 \\ 0 - \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1} & \text{pro } s > 1. \end{cases}$$
Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konv. $\Leftrightarrow s > 1$.

- $$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \log x} = \left[\log\log x\right]_2^{+\infty} = +\infty - \log\log 2 = +\infty.$$
Tedy řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$ diverguje.

Cvičení 8 Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^s}$, $s > 0$.