Přednáška 4, 23. října 2019

Homeomorfismy. Pouta. Souvislé prostory. Úplné prostory

Absolutnost kompaktnosti. V kontrastu s otevřeností a uzavřeností je kompaktnost absolutní vlastnost — nezávisí na tom, v jakém prostoru či podprostoru se daná množina uvažuje (úloha 1).

Tvrzení (kompaktnost a homeomorfismus). *Je-li $f\colon M \to N$ spojité prosté zobrazení mezi metrickými prostory a M je kompaktní, je inverzní zobrazení $f^{-1}\colon f(M) \to M$ spojité. Zobrazení f je tedy homeomorfismem prostorů M a $f(M)$ (poslední je dán jako podprostor prostoru N).*

Důkaz. Podle úlohy 6 v předešlé přednášce je $f(M)$ kompaktní podmnožina prostoru N. Podle definice kompaktní množiny ve 2. přednášce to znamená, že $f(M)$ je kompaktní prostor. Nechť $X \subset M$ je libovolná uzavřená podmnožina prostoru M. Podle úlohy 3 v předešlé přednášce je X kompaktní. Podle úlohy 6 v předešlé přednášce je $f(X)$ kompaktní podmnožina prostoru $f(M)$. Podle úlohy 4 v předešlé přednášce je $f(X)$ uzavřená podmnožina prostoru $f(M)$. Ale

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(X) = f(X)$$

— vzor libovolné uzavřené podmnožiny prostoru M v zobrazení f^{-1} je uzavřená podmnožina prostoru $f(M)$. Zobrazení $f^{-1}\colon f(M) \to M$ je tedy spojité podle úlohy 2 v předešlé přednášce. $\square$

Euklidovské prostory $[a, b]$ a S_1. V závěru minulé přednášky jsme zmínili spojitou bijekci mezi euklidovskými prostory $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ a

$$S_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ (jednotková kružnice)}\,,$$

jejíž inverz ale není spojitý, a slíbili jsme ukázat, že oba prostory nejsou homeomorfní. To je ale zřejmé (úloha 2) z toho, že první prostor není kompaktní, ale druhý je (např. podle úlohy 5 v předešlé přednášce). To vede přirozeně k následující otázce.

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$, jsou euklidovské prostory $[a, b]$ a S_1 homeomorfní?

Oba jsou kompaktní a předchozí argument nám nepomůže. Na přednášce byl položen dotaz, jak je to s bijekcí mezi $[a, b]$ a S_1. Bijekce mezi $[a, b)$ a

S_1 je jasná, tento interval na kružnici snadno bijektivně navineme a minule jsme takové navinutí explicitně definovali pro $[0, 2\pi)$, ale jak bijektivně „navineme“ $[a, b]$? Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty (úloha 3): Pokud pro dvě množiny A a B existují injekce $A \to B$ a $B \to A$, pak existuje bijekce $A \to B$ (která je navíc a nevyhnutelně — odkud jinud by se vzala — z obou injekcí definovaná). Než pomocí souvislých prostorů problém homeomorfnosti $[a, b]$ a S_1 vyřešíme, podíváme se na jeden rébus, který s homeomorfismy souvisí.

Rébus s pouty. V našem trojrozměrném prostoru $\mathbb{R}^3$ se souřadnicemi (x, y, z) máme dány tři množiny $P, K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$. Množina P jsou trojrozměrná „pouta“, dvě kruhová oka spojená tyčkou, a K_1, K_2 je jednorozměrný kroužek ve dvou polohách, přičemž $P \cap K_1 = P \cap K_2 = \emptyset$. Všechny tři množiny níže přesně analyticky definujeme a popíšeme. V první poloze $P \cup K_1$ je K_1 provlečen oběma oky pout. Ve druhé poloze $P \cup K_2$ je K_2 provlečen jen jedním okem. Úkolem je pomocí spojité a prosté transformace převést první polohu na druhou (nebo naopak). Kroužek je z dokonale pružného drátu, který můžeme libovolně natahovat a ohýbat. Pouta jsou z dokonale elastické hmoty, nějaké modelovací plastelíny, a můžeme je libovolně hníst a tvarovat. Ovšem jen spojitými a prostými transformacemi, materiál nemůže neinjektivně pronikat sám sebou ani být nespojitě roztržen. Například transformace, kdy se jedno oko pout roztrhne, kroužek se mezerou vyvlékne, a roztržené oko se zase spojí, je nepřípustná. Jaká manipulace tedy převádí polohu s kroužkem provlečeným oběma oky do polohy, kdy je provlečen jen jedním okem? Vypadá to nemožně: je-li kroužek provlečen okem, tak předsi bez roztržení oka či kroužku nebo zázračného prostoupení kroužku okem nelze oko a kroužek rozpojit? Návodem budiž, že je třeba využít trojrozměrnosti pout a jejich plastičnosti. (Řešení viz např. str. 25 v `https://mskrieger.files.wordpress.com/2015/12/6305_nishiyama.pdf`)

Abychom se procvičili v analytické geometrii a metrických prostorech, pouta a kroužky popíšeme rovnicemi. Pracujeme v euklidovském metrickém prostoru $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, d_2)$. Pro $X \subset \mathbb{R}^3$ a $\delta > 0$ zavedeme množinu

$$(X)_\delta = \{a \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, b \in X:\ d_2(a, b) \le \delta\}\ .$$

Je to trojrozměrný „obal“ množiny X s tloušťkou δ. Pro $u, v, r \in \mathbb{R}$ s $r > 0$ definujeme množiny

$$K(u, v, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \;\&\; (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2\}$$

a

$$L(u,v,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \ \&\ (x-u)^2 + (z-v)^2 = r^2\}\ .$$

První je vodorovný kroužek v rovině $z = 0$ s poloměrem r a středem $(u,v,0)$. Druhá je svislý kroužek v rovině $y = 0$ s poloměrem r a středem $(u,0,v)$. Položíme

$$P = (K(-6,0,4))_1 \cup (\{(x,\ y,\ z) \mid -2 \le x \le 2,\ y = z = 0\})_1 \cup (K(6,0,4))_1$$

a

$$K_1 = L(0,\ 0,\ 6),\ \ K_2 = L(12,\ 0,\ 6)\ .$$

Lehce se vidí (úloha 4) že $P \cup K_i$, $i = 1,2$, jsou dvě uvedené polohy pout a kroužku.

Ale co se rozumí "spojitou a prostou transformací" povolenou pro proměnu $P \cup K_1$ v $P \cup K_2$? To sem doplníme někdy později.

Souvislé prostory. Podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M,d) je *obojetná* (angl. *clopen*), je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M. Prostor M je *souvislý*, nemá-li netriviální (různou od $\emptyset$ a M) obojetnou podmnožinu. (Pod)množina $X \subset M$ je *souvislá*, je-li podprostor (X,d) souvislý. Nastává-li opak, má-li M či X netriviální obojetnou podmnožinu, mluvíme o *nesouvislém* prostoru či *nesouvislé* podmnožině. Například $X = \{0\} \cup \{1\} \cup (11,14] \subset \mathbb{R}$ je nesouvislá množina (v euklidovském prostoru $\mathbb{R}$), protože $\{1\}$ je jedna z jejích netriviálních obojetných podmnožin (úloha 5). Souvislost či nesouvislost X je (stejně jako kompaktnost) absolutní vlastnost (úloha 6).

Uvedeme ekvivalentní definici nesouvislosti. V teorii množin nebo v kombinatorice *rozkladem množiny* A rozumíme množinu B s vlastnostmi: (i) $\emptyset \notin B$, (ii) $C,D \in B$ a $C \neq D \Rightarrow C \cap D = \emptyset$ a (iii) $\bigcup B = A$. Lehce se vidí, že ekvivalentní definice nesouvislosti podmnožiny $X \subset M$ je:

> Podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá, má-li *otevřený* (*uzavřený*) *rozklad* $\{Y,\ Z\}$, což je rozklad množiny X na množiny $Y,Z \subset X$ otevřené (uzavřené) v X.

Vzhledem ke charakterizaci otevřených a uzavřených množin v podprostoru (úloha 10 v předešlé přednášce) můžeme též říci, že podmnožina $X \subset M$ je nesouvislá, právě když existují otevřené (uzavřené) podmnožiny $A,B \subset M$, že $\{A \cap X, B \cap X\}$ je její rozklad. Nesouvislost prostoru intuitivně znamená, že se rozpadá na dvě neprázdné a oddělené části. Souvislost znamená, že to nenastává.

Tvrzení (souvislost a spojitá zobrazení). *Je-li $f\colon M \to N$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory a $X \subset M$ je souvislá množina, je její obraz $f(X) \subset N$ též souvislá množina.*

Důkaz. Z nesouvislosti $f(X)$ odvodíme nesouvislost X. Protože je $f(X)$ nesouvislá, existují otevřené podmnožiny $A, B \subset N$, že $P = \{A \cap f(X), B \cap f(X)\}$ je rozklad množiny $f(X)$. Tvrdíme, že pak

$$\{f^{-1}(A) \cap X,\ f^{-1}(B) \cap X\}$$

je otevřený rozklad množiny X. Oba vzory jsou otevřené množiny v M (podle úlohy 2 v předešlé přednášce). Oba průniky jsou disjunktní: kdyby $x \in f^{-1}(A) \cap X$ i $x \in f^{-1}(B) \cap X$, pak by $f(x) \in A \cap B \cap f(X)$, ve sporu s tím, že P je rozklad $f(X)$. Protože $A \cap f(X) \neq \emptyset$, můžeme vzít nějaký prvek $a \in A \cap f(X)$. Pak zřejmě jakékoli $x \in X$ s $f(x) = a$ splňuje $x \in f^{-1}(A)$, takže $f^{-1}(A) \cap X \neq \emptyset$. Stejně se ukáže, že $f^{-1}(B) \cap X \neq \emptyset$. Konečně, je-li $x \in X$ libovolný prvek, $f(x)$ leží v $A \cap f(X)$ nebo v $B \cap f(X)$ (protože P je rozklad $f(X)$), takže x leží i v $f^{-1}(A)$ nebo v $f^{-1}(B)$ a sjednocení obou průniků je X. $\square$

Dva homeomorfní metrické prostory jsou tedy buď současné souvislé nebo současně nesouvislé.

Intervaly. Připomeňme si, že $X \subset \mathbb{R}$ je *interval*, když

$$b \in X, \text{ jakmile } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ splňují } a < b < c \text{ a } a, c \in X\ .$$

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ jsou všechny druhy intervalů od největších po nejmenší tyto: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $\{a\}$ a $\emptyset$.

Tvrzení (souvislé množiny v $\mathbb{R}$). *Euklidovský (pod)prostor $X \subset \mathbb{R}$ je souvislý, právě když je interval.*

Důkaz. Když $X \subset \mathbb{R}$ není interval, máme tři reálná čísla $a < b < c$, že $a, c \in X$, ale $b \notin X$. Lehce se vidí, že pak

$$\{X \cap (-\infty, b),\ X \cap (b, +\infty)\}$$

je otevřený rozklad množiny X a ta je tedy nesouvislá. Naopak předpokládejme, že $X \subset \mathbb{R}$ je nesouvislá a máme její uzavřený rozklad

$$P = \{X \cap A,\ X \cap B\}\ ,$$

kde $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou uzavřené množiny. Protože oba průniky jsou neprázdné a disjunktní, můžeme si vzít čísla $a \in X \cap A$ a $b \in X \cap B$ a předpokládat, že $a < b$. Definujeme číslo

$$c = \sup(\{x \in [a,\ b] \mid x \in A\}) \in [a,\ b]$$

(supremum c existuje, protože $a \in A$ a b je horní mezí dané množiny). Rozlišíme dva případy podle toho, zda c leží či neleží v X.[1] Když $c \notin X$, pak $a < c < b$ a tato trojice bodů ukazuje, že X není interval. Nechť tedy $c \in X$. Díky aproximační vlastnosti suprema a uzavřenosti A je i $c \in A$, tedy $c < b$, protože $c \notin B$ (P je rozklad množiny X). Kdyby $(c, b) \subset X$, byl by i $(c, b) \subset B$ (tento interval je totiž větší než supremum c), c by byl limitou posloupnosti bodů v B a tedy by byl $c \in B$ díky uzavřenosti B, což jak už víme nelze. Existuje tedy bod $d \in (c, b)$, že $d \notin X$. Trojice $a < d < b$ pak opět ukazuje, že X není interval. $\square$

Například jednotková kružnice S_1 je souvislý (euklidovský) prostor, protože je spojitým obrazem souvislé množiny, intervalu $[0, 2\pi)$. Kombinací obou předchozích tvrzení a úlohy 7 lze sestrojit mnoho souvislých prostorů.

Prostory $[a, b]$ a S_1 jsou nehomeomorfní. To teď dokážeme. Zdálo by se, že ani (ne)souvislost nám nepomůže, protože oba prostory jsou souvislé. Nicméně množina $[a, b] \setminus \{c\}$ je pro každý vyhozený bod $c \in (a, b)$ nesouvislá, ale množina $S_1 \setminus \{p\}$ je pro každý vyhozený bod $p \in S_1$ souvislá (za okamžik obojí zdůvodníme). Kdyby existoval homeomorfismus $f\colon [a, b] \to S_1$, pro každý bod $c \in (a, b)$ by byl obraz $f^{-1}(S_1 \setminus \{f(c)\}) = [a, b] \setminus \{c\}$ souvislé množiny $S_1 \setminus \{f(c)\}$ spojitým zobrazením f^{-1} nesouvislý, v rozporu s tvrzením výše. Homeomorfismus mezi $[a, b]$ a S_1 tedy neexistuje. Prostor $[a, b] \setminus \{c\}$, $a < c < b$, je nesouvislý podle posledního tvrzení, protože není interval. Prostor $S_1 \setminus \{p\}$ je souvislý, protože je homeomorfní souvislému prostoru $\mathbb{R}$: když $p = (0, 1)$ je severní pól, je bijekce

$$f\colon S_1 \setminus \{(0,\ 1)\} \to X = \text{osa } x,\ \ f(q) = \text{průsečík } \ell \text{ a } X\ ,$$

[1] Na přednášce jsem na toto rozlišení zapomněl.

kde ℓ je přímka jdoucí body $(0,1)$ a q, homeomorfismem obou prostorů. Pro jiný bod $p \in S_1$ se tato definice homeomorfismu snadno upraví. Souvislosti a homeomorfismům se věnují úlohy 8–11.

Úplné prostory. Metrický prostor (M,d) je *úplný*, má-li každá cauchyovská posloupnost $(a_n) \subset M$ jeho bodů limitu $\lim a_n = a \in M$. Připomínáme a vlastně definujeme, že posloupnost $(a_n) \subset M$ je *cauchyovská*, když

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 :\; m, n > n_0 \Rightarrow d(a_m,\, a_n) < \varepsilon\;.$$

Podmnožina $X \subset M$ je *úplná*, je-li podprostor (X,d) úplný. Základním příkladem úplného prostoru je samozřejmě euklidovský prostor $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, |x-y|)$, jak dobře víme z *Matematické analýzy I* z věty o konvergenci cauchyovské posloupnosti.

Úplnost podmnožiny je opět absolutní vlastnost (úloha 12). Další jednoduché vlastnosti úplných prostorů ponecháváme jako úlohy. Úplná podmnožina je vždy uzavřená (úloha 13). Kompaktní podmnožina je vždy úplná (úloha 14). Uzavřená podmnožina úplného prostoru je úplná (úloha 15). Uvedeme si dvě pozoruhodné věty o úplných prostorech. Důkaz první ponecháváme s návodem jako úlohu 16 a druhou si i s důkazem povíme na příští přednášce.

Banachova věta o pevném bodu. Zobrazení $f\colon M \to M$ metrického prostoru (M,d) do sebe je *kontrahující*, existuje-li reálná konstanta $c \in [0,1)$ (menší než 1!), že

$$\forall\, x,\, y \in M :\; d(f(x),\, f(y)) \le c \cdot d(x,\, y)$$

— f zkracuje vzdálenosti v poměru alespoň $c : 1$.

Věta (S. Banach, 1922). *Nechť (M,d) je úplný metrický prostor a*

$$f\colon M \to M$$

je kontrahující zobrazení. Pak existuje právě jeden bod $x_0 \in M$, že $f(x_0) = x_0$ (x_0 je „pevný bod“ zobrazení f). Pro každý bod $a \in M$ posloupnost

$$(a,\, f(a),\, f(f(a)),\, f(f(f(a))),\, \ldots) \subset M$$

iterací zobrazení f začínající v a konverguje k x_0.

Důkaz je naznačen v úloze 16. Úplné prostory jsou přinejmenším stejně důležité jako kompaktní (souvislé prostory jsou nepochybně za nimi až na třetím místě), protože v nich nejrůznější rovnice mají řešení. Například, jak jsme viděli v *Matematické analýze I*, $x^2 = 2$ má řešení v $\mathbb{R}$. Banachova věta o pevném bodu umožňuje dokázat řešitelnost široké třídy diferenciálních (a některých jiných) rovnic. Možná si o tom někdy povíme více v následující kapitole. Další vlastnosti úplných prostorů jsou uvedeny v úlohách 17–20.

Úlohy

1. Nechť $A \subset X \subset M$ jsou podmnožiny v metrickém prostoru (M, d). Dokažte, že množina A je kompaktní v M, právě když je kompaktní v podprostoru X.

2. Dokažte, že dva homeomorfní metrické prostory jsou současně kompaktní nebo současně nekompaktní.

3. Jak z Cantorovy–Bernsteinovy věty plyne existence bijekce mezi $[a, b]$ ($a < b$ jsou reálná čísla) a S_1?

4. Ověřte, že takto analyticky definované množiny $P \cup K_1$ a $P \cup K_2$ jsou opravdu pouta a kroužek v obou popsaných polohách.

5. Kolik má prostor $X = \{0\} \cup \{1\} \cup (11, 14] \subset \mathbb{R}$ obojetných podmnožin?

6. Nechť $A \subset X \subset M$ jsou podmnožiny v metrickém prostoru (M, d). Dokažte, že množina A je souvislá v M, právě když je souvislá v podprostoru X.

7. Nechť $X_i \subset M$, $i \in I$, jsou souvislé množiny v metrickém prostoru M a $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Dokažte, že potom je $\bigcup_{i \in I} X_i$ souvislá množina.

8. Uveďte příklad dvou nesouvislých množin v metrickém prostoru, jejichž sjednocení je souvislé.

9. Je euklidovský prostor $X \subset \mathbb{R}^2$, definovaný jako

   $$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(t, \sin(1/t) \mid 0 < t \leq 1)\} ,$$

   souvislý?

10. Dokažte, že euklidovské prostory $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$ (jednotkový čtverec v rovině) a $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ (jednotková kružnice v rovině) nejsou homeomorfní.

11. Dokažte, že euklidovské prostory $\mathbb{R}^2$ a $S_2 \setminus \{(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ (jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$ s vyhozeným severním pólem) jsou homeomorfní.

12. Nechť $A \subset X \subset M$ jsou podmnožiny v metrickém prostoru (M, d). Dokažte, že množina A je úplná v M, právě když je úplná v podprostoru X.

13. Dokažte, že úplná podmnožina metrického prostoru je uzavřená.

14. Dokažte, že kompaktní podmnožina metrického prostoru je úplná.

15. Dokažte, že uzavřená podmnožina úplného metrického prostoru je úplná.

16. Dokažte podle následujícího návodu Banachovu větu o pevném bodu.

    (a) Jednoznačnost: jsou-li $x_0, x_1 \in M$ dva pevné body zobrazení f, pak $d(x_0, x_1) = 0$.

    (b) Když $a_0 \in M, a_1 = f(a_0), a_2 = f(a_1), \ldots$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $d(a_0, a_n) \leq d(a_0, a_1)(1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1})$. Rovněž $d(a_{n-1}, a_n) \leq c^{n-1} d(a_0, a_1)$.

    (c) Tudíž je posloupnost (a_n) iterací zobrazení f začínající v a (uvedená ve znění věty) cauchyovská a má limitu $x_0 \in M$.

    (d) Ale f je spojité zobrazení (proč?), takže $(f(a_n))$ má limitu $f(x_0)$ a $f(x_0) = x_0$. Důkaz je dokončen

17. Je euklidovský podprostor $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ úplný?

18. Je průnik dvou úplných množin v metrickém prostoru úplný?

19. A sjednocení?

20. A množinový rozdíl?