Přednáška 4, 26. října 2015

Tvrzení (jedna vlastnost S). *Nechť $S \subset \mathbb{R}^2$ označuje jednotkovou kružnici v rovině s euklidovskou metrikou. Když je zobrazení*

$$f:\ S \to S$$

spojité a lokálně prosté, pak $f(S) = S$ — každá rovnice $f(x) = a$, $a \in S$, má řešení $x \in S$.

Důkaz. Dokážeme, že každé spojité zobrazení $f:\ S \to S$ je na nebo není lokálně prosté. S je kompaktní (je to uzavřená a omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$) a souvislý prostor ($S = g([-1,1]) \cup h([-1,1])$, kde $g, h:\ [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ jsou spojitá zobrazení $g(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$ a $h(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$, viz úloha 1). Tedy $f(S)$ je kompaktní a souvislá podmnožina S, speciálně je $f(S)$ uzavřená. Odtud plyne (úloha 2), že $f(S)$ je (i) uzavřený oblouk v S s koncovými body b a c (může se stát, že $f(S) = \{b\} = \{c\}$ je jediný bod) nebo (ii) celé S. Případ (ii) je jasný. V případu (i) ukážeme, že na žádném okolí bodu $a \in f^{-1}(b)$ (některý ze vzorů jednoho z konců oblouku $f(S)$) není zobrazení f prosté. Nechť $A \subset S$ je libovolný uzavřený oblouk obsahující a ve svém vnitřku. Pak $B = f(A) \subset S$ je uzavřený oblouk s koncovým bodem b. Pro spor nechť je zúžení f na A prosté. Pak je toto zúžení homeomorfismem A a B (podle tvrzení z minulé přednášky, protože A je kompaktní). Tedy $A \backslash \{a\}$ a $f(A) \backslash \{f(a)\} = B \backslash \{b\}$ jsou homeomorfní prostory (úloha 3). To však není pravda, protože první je nesouvislý a druhý souvislý. Zúžení f na A tedy není prosté a f není lokálně prosté. $\square$

Souvislost množiny se dá intuitivně uchopit také pomocí spojovací cesty. Řekneme, že podmnožina $X \subset M$ v metrickém prostoru (M, d) je *křivkově souvislá* (resp. *obloukově souvislá*), když pro každé dva její body $a, b \in X$ existuje spojité zobrazení (resp. spojité a prosté zobrazení)

$$f:\ [0,1] \to X,\ f(0) = a,\ f(1) = b\ ,$$

kde interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ je euklidovský (pod)prostor. Obraz $f([0,1])$ pak je *křivka*, resp. *oblouk*, spojující body a a b v X. Všimněte si, že oblouk je vždy homeomorfní intervalu $[0,1]$. Obloukově souvislá množina je zřejmě křivkově souvislá. Dá se dokázat i opačná implikace (úloha 4), takže pro metrické prostory oblouková a křivková souvislost splývají (pro topologické prostory nikoli). Podobně v diskrétní matematice je graf $G = (V, E)$ souvislý, právě když lze každé dva jeho vrcholy spojit cestou, ekvivalentně právě když lze každé dva jeho vrcholy spojit sledem (úlohy 5 a 6).

Tvrzení (souvislost a křivková souvislost). *Nechť* (M, d) *je metrický prostor.*

1. *Je-li podmnožina* $X \subset M$ *křivkově souvislá, je souvislá.*

2. *Existuje souvislý metrický prostor, jenž není křivkově souvislý.*

3. *Je-li každá koule* $B(a, r)$ *v prostoru* M *křivkově souvislá, potom je každá otevřená a souvislá podmnožina* $X \subset M$ *i křivkově souvislá.*

Důkaz. 1. Úloha 7.

2. Klasický příklad je euklidovský podprostor $X \subset \mathbb{R}^2$, jenž se skládá z grafu funkce $\sin(1/x)$ na intervalu $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ a z bodu $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Detaily doplňte v úloze 8.

3. Nechť $X \subset M$ je otevřená a souvislá množina. Uvážíme na ní binární relaci $\sim$: pro $a, b \in X$ je $a \sim b$, právě když a a b lze v X spojit křivkou. Není těžké ukázat, že $\sim$ je relace ekvivalence (úloha 9). Když $a, b \in X$, $a \sim b$ a $B(b, r) \subset X$, pak podle tranzitivity $\sim$ a předpokladu křivkové souvislosti $B(b, r)$ je $a \sim c$ pro každý bod $c \in B(b, r)$. Třída ekvivalence $[a]$ prvku a, $[a] = \{c \in X \mid a \sim c\}$, je tedy otevřená množina. Kdyby $X/\sim$ sestávala z alespoň dvou tříd ekvivalence, byl by ($a \in X$ je libovolný bod)

$$X = [a] \cup \bigcup_{c \in X,\, c \not\sim a} [c]$$

rozklad X na dvě disjunktní otevřené a neprázdné množiny, ve sporu se souvislostí X. Proto má $X/\sim$ jen jednu třídu ekvivalence a X je křivkově souvislá. $\square$

Část 3 tvrzení platí pro euklidovské prostory $\mathbb{R}^n$, v nichž jsou koule jistě křivkově souvislé, protože to jsou dokonce konvexní množiny, jejichž každé dva body lze v rámci koule spojit úsečkou. V $\mathbb{R}^n$ tedy souvislost a křivková souvislost pro otevřené množiny splývají.

Zmíníme protiintuitivní příklad dvou souvislých množin, které se prostupují ale neprotínají. (Pro obloukově souvislé množiny to nastat nemůže.)

Příklad (prostupující se souvislé množiny). *Nechť* $M = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ *je jednotkový čtverec v rovině, s euklidovskou metrikou. Uvažme jeho rozklad na dvě množiny*

$$A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \{0\} \cup ([0,1] \backslash \mathbb{Q}) \times (0,1] \quad a \quad B = M \backslash A\ .$$

A se skládá z bodů na dolní straně čtverce s racionální x-ovou souřadnicí a ze svislých úseček délky 1 s vyjmutými dolními konci a s iracionálními x-ovými souřadnicemi. B je doplněk A do čtverce. Obě množiny A a B protínají každou ze čtyř stran čtverce, jsou disjunktní a jsou souvislé.

Důkaz byl před dvěma lety, alespoň v zápisu z přednášky, proto si ho letos odpustíme.

Úplné metrické prostory. Metrický prostor (M,d) je *úplný*, když každá cauchyovská posloupnost bodů v M konverguje. Explicitně, pro každou posloupnost bodů $(a_n) \subset M$ platí implikace: když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ m,n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m,a_n) < \varepsilon\ ,$$

pak

$$\exists a \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n,a) < \varepsilon\ .$$

Podmnožina $X \subset M$ *je úplná*, když je podprostor (X,d) úplný.

Kompaktní metrický prostor už je automaticky úplný (úloha 10). Vztah mezi úplností množiny a její uzavřeností popisuje následující tvrzení.

Tvrzení (úplnost versus uzavřenost). *Nechť (M,d) je metrický prostor a $X \subset M$ je jeho podmnožina. Pak a) je-li X úplná, je X uzavřená a b) je-li celý prostor M úplný a X je uzavřená, je X úplná.*

Důkaz. úloha 11. □

Stručně: podmnožina úplného metrického prostoru je úplná, právě když je uzavřená. Implikace $\Rightarrow$ platí v každém metrickém prostoru.

Příklady. Euklidovský prostor $\mathbb{R}$ je úplný, každá cauchyovská posloupnost reálných čísel má limitu. Úplné jsou i podprostory $[2,3]$ a $[-5,+\infty)$, protože jsou uzavřené. Naopak podprostory $\mathbb{Q}$ a $(0,1]$ nejsou uzavřené a proto nejsou úplné. Obecněji i euklidovské prostory $\mathbb{R}^n$ jsou úplné. Podmnožina $X = (0,1)$

v euklidovském prostoru $M = (0,1) \cup (2,3)$ není úplná (posloupnost $(1/n)$ je cauchyovská, ale nemá (v X) limitu), i když je X uzavřená podmnožina M.

Banachova věta o pevném bodu. Pomocí úplnosti lze pro mnoho typů rovnic dokázat existenci řešení. Uvedeme si větu o takové metodě důkazu. Nejprve ale pár definic.

Zobrazení $f: M \to M$ metrického prostoru (M,d) do sebe je *kontrahující*, když existuje takové reálné číslo q s $0 < q < 1$, že pro každé dva body $x, y \in M$ platí nerovnost

$$d(f(x), f(y)) \le q d(x,y) \ .$$

Kontrahující zobrazení tedy zkracuje vzdálenost každých dvou bodů alespoň o pevný faktor q menší než 1. Je jasné, že kontrahující zobrazení je na M stejnoměrně spojité. *Pevným bodem* zobrazení f množiny X do sebe rozumíme bod a z X splňující $f(a) = a$. Posloupnost $(x_n) \subset X$ je *posloupností iterací* zobrazení $f: X \to X$, když pro $n = 1, 2, \ldots$ platí $x_{n+1} = f(x_n)$ ($x_1 \in X$ je libovolný startovací bod této posloupnosti). Následující věta náleží polskému matematikovi Stefanu Banachovi (1892–1945).

Věta (Banachova věta o pevném bodu). *Kontrahující zobrazení f úplného metrického prostoru (M,d) do sebe má právě jeden pevný bod a každá posloupnost iterací $(x_n) \subset M$ zobrazení f k němu konverguje.*

Důkaz. Nechť a a b jsou dva pevné body f. Pak

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \le q d(a,b) \ ,$$

a to je, vzhledem ke $q < 1$, možné pouze pro hodnotu $d(a,b) = 0$. Tedy $a = b$ a vidíme, že f má buď jediný pevný bod nebo žádný. Z cauchyovskosti posloupnosti iterací (x_n) zobrazení f existence pevného bodu hned plyne, je to totiž limita $a = \lim x_n$ (jež existuje, neboť jsme v úplném prostoru):

$$a = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$$

(viz úlohu 12). Příště dokážeme, že posloupnost iterací (x_n) je opravdu cauchyovská. $\square$

Úlohy

1. Proč neřekneme jednodušeji, že $S = g([0, 2\pi])$, kde g je spojité zobrazení $g(x) = (\cos x, \sin x)$?

2. Dokažte, že neprázdná uzavřená souvislá podmnožina S je (případně jednobodový) uzavřený oblouk nebo celé S.

3. Ukažte, že když je $f : M \to N$ homeomorfismus, pak je pro každý bod $a \in M$ zúžení f na $M \backslash \{a\}$ homeomorfismus prostorů $M \backslash \{a\}$ a $N \backslash \{f(a)\}$.

4. (těžší úloha) Dokažte, že každá křivkově souvislá množina je obloukově souvislá.

5. Připomeňte si, jak se dokazuje, že v grafu $G = (V, E)$ lze nějaké dva vrcholy spojit sledem, právě když je lze spojit cestou.

6. Nechť je graf $G = (V, E)$ souvislý ve smyslu diskrétní matematiky. Když ho vezmeme jako metrický prostor (s metrikou danou grafovou vzdáleností, délkou nejkratší spojující cesty), je souvislý? Je obloukově souvislý?

7. Dokažte, že křivkově souvislá množina je souvislá.

8. Dokažte, že množina $\{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x < 1\} \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ je souvislá, ale ne křivkově souvislá.

9. Dokažte, že spojitelnost dvou bodů z X křivkou v X je reflexivní, symetrická a tranzitivní binární relace.

10. Dokažte, že kompaktní metrický prostor je úplný.

11. Dokažte tvrzení o úplnosti a uzavřenosti.

12. Zdůvodněte podrobně platnost každé z pěti rovností ve výpočtu $a = \cdots = f(a)$ v důkazu Banachovy věty o pevném bodu.