Přednáška 4, 17. března 2014

Krok K3

Pomocí kroku K1, Jordanovy věty o kružnici pro polygony, dokážeme, že graf $K_{3,3}$ nemá polygonální rovinné nakreslení.

To je klasický výsledek z Diskrétní matematiky, spíše známý obecněji, že $K_{3,3}$ nemá rovinné nakreslení. To hned z K3 plyne pomocí dříve dokázaného kroku K4. Důkaz snadno dostaneme pomocí následujícího lemmatu. Lomená čára K je *chorda polygonu* C, leží-li její konce na C ale jinak je s C disjunktní. Chordy P a Q polygonu C (s různými konci) mají *křížící se konce*, leží-li každý z konců P v jiném ze dvou oblouků, na něž polygon C dělí konce Q.

Lemma (o křížení chord). *Nechť $C \subset \mathbb{R}^2$ je polygon a P a Q jsou jeho dvě chordy, které mají křížící se konce a obě leží uvnitř C nebo obě leží vně C. Pak se P a Q samy nutně kříží: $P \cap Q \neq \emptyset$.*

Mějme polygonální nakreslení $v \mapsto b_v, e \mapsto K_e$ grafu $K_{3,3}$ s vrcholovými partitami $\{a, b, c\}$ a $\{x, y, z\}$. Posloupnost bodů $b_a, b_x, b_b, b_y, b_c, b_z$ a lomené čáry $K_{\{a,x\}}, K_{\{x,b\}}, \ldots, K_{\{z,a\}}$ tvoří šesticyklus $C \subset \mathbb{R}^2$. Pokud C není polygon (hrany se v něm kříží), není to rovinné nakreslení. Nechť C je polygon. Uvažme reprezentace tří zbývajících hran, $K_{\{a,y\}}$, $K_{\{b,z\}}$ a $K_{\{c,x\}}$. Dvě z těchto tří chord C leží uvnitř C nebo dvě z nich leží vně C. Podle lemmatu se vždy kříží, takže zas nejde o rovinné nakreslení.

Zbývá dokázat lemma. Konce P buďte a a b a konce Q buďte c a d. Jako P_1 a P_2 označíme dva oblouky, na něž a a b rozdělují polygon C. Řekněme, že $c \in P_1$ a $d \in P_2$. Uvážíme polygon $C_2 = P_2 \cup P$.

První případ je, že P i Q leží uvnitř C. Vidíme, že c leží vně C_2 a (jdeme-li po Q z c do d) dostatečně krátký koncový úsek před d z poslední úsečky ve Q leží uvnitř C_2 (protože každý bod vně C je i vně C_2). Takže vnitřní body Q protínají C_2 a tedy (neboť neprotínají C) protínají P.

Druhý případ je, že P i Q leží vně C. Je jasné, že pak je vnitřek C obsažen v jediné komponentě, řekněme X, množiny $\mathbb{R}^2 \backslash C_2$ a že $c \in X$. Opět vidíme, že dostatečně krátký koncový úsek před d z poslední úsečky ve Q neleží v X ale ve druhé komponentě množiny $\mathbb{R}^2 \backslash C_2$ (prodloužíme-li totiž Q trochu za

d (tak, že C a tedy C_2 protneme kolmým průsečíkem), octneme se uvnitř C a tedy v X). Zas vnitřní body Q protínají C_2 a tedy P. Lemma je dokázáno.

Krok K2

Následující výsledek je pozoruhodný a důležitý sám o sobě a dá práci jej řádně dokázat.

Věta (o křivce). *Když je $K \subset \mathbb{R}^2$ prostá křivka, to jest K je obraz spojitého a prostého zobrazení $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}^2$, pak je množina $\mathbb{R}^2 \backslash K$ souvislá.*

Postupujeme stále podle Thomassenova článku. Důkaz této věty je založen na 2-souvislých grafech a i na kroku K1, Jordanově větě pro polygony.

Vzpomeňme si, že graf $G = (V, E)$ je *2-souvislý*, je-li souvislý a zůstává souvislý po vyhození libovolného vrcholu (a má alespoň 2 vrcholy). *Přidání ucha* je operace, jež z G vytvoří graf G', kdy nějaké dva různé vrcholy z G spojíme cestou (jež může být i pouhá hrana a jejíž vnitřní vrcholy nejsou v G). Lehce se vidí, že když je G 2-souvislý, je takový i G'. Platí to ale i obráceně:

Lemma (o uchách). *Každý 2-souvislý graf lze vytvořit z kružnice postupným přidáváním ucha.*

Toto populární lemma nebudeme dokazovat (důkaz je snadný a běží indukcí podle velikost grafu) a odkážeme na Diskrétní matematiku.

Nechť $G = (V, E)$ je graf a $v \mapsto b_v, e \mapsto K_e$ je jeho rovinné nakreslení. Připomínáme, že *stěna* tohoto nakreslení je komponenta souvislosti množiny

$$\mathbb{R}^2 \backslash \bigcup_{e \in E} K_e\ .$$

Důsledek. *Kromě jedné jsou všechny stěny v polygonálním rovinném nakreslení N 2-souvislého grafu G vnitřky nějakých polygonů a říkáme jim* vnitřní stěny. *Výjimečná* vnější stěna*, zvaná též* vnějšek nakreslení*, je vnějškem nějakého polygonu C. Celé nakreslení N leží uvnitř C nebo na C.*

Dokážeme to indukcí podle počtu hran v G. Je-li G kružnice, důsledek zjevně platí díky kroku K1. Není-li G kružnice, vznikl G podle lemmatu o uchách z nějakého grafu G' přidáním ucha U, přičemž G' je 2-souvislý a má méně hran než G. V (polygonálním a rovinném) nakreslení N' grafu G' tomu odpovídá přidání chordy U' do nějaké stěny S', přičemž S' je vnitřkem nebo vnějškem polygonu C'. Je-li vnitřkem, rozdělí U' stěnu S' na dvě nové vnitřní stěny, jež jsou vnitřky polygonů složených z U' a oblouku polygonu C'. Vnějšek se nezmění. Tím dostaneme nakreslení N grafu G. Je-li S' vnějškem C', rozdělí U' vnějšek S' na vnitřní stěnu a nový vnějšek. Obě tyto nové stěny nakreslení N grafu G mají opět jako hranici polygon složený z U' a oblouku polygonu C'. Je též vidět, že po přidání chordy U' celé nakreslení N opět leží uvnitř C a na C, kde C je hranice vnější stěny. Tím je důsledek dokázán.

V důkazu jsme fakticky použili část 3 následujícího lemmatu, které teď řádně dokážeme.

Lemma (o chordě). *Nechť $C \subset \mathbb{R}^2$ je polygon a P je jeho chorda, jež leží (kromě konců) v komponentě X množiny $\mathbb{R}^2 \backslash C$. Vezmeme polygony $C_1 = P \cup P_1$ a $C_2 = P \cup P_2$, kde P_i jsou dva oblouky, na něž konce P dělí C. Pak platí následující.*

1. *Nechť x je bod uvnitř C, ale ne na P. Potom x leží uvnitř C_1 a vně C_2 nebo vně C_1 a uvnitř C_2.*
2. *Nechť x je bod vně C, ale ne na P. Potom x leží uvnitř C_1 i uvnitř C_2 nebo vně C_1 i vně C_2.*
3. *Množina $X \backslash P$ má právě dvě komponenty, jejichž hranicemi jsou polygony C_1 a C_2.*

Důkaz části 1. Uvážíme průsečíková čísla $p_C(x)$, $p_{C_1}(x)$ a $p_{C_2}(x)$ bodu x vzhledem k těmto třem polygonům (viz důkaz kroku K1) a spočteme je pomocí nějaké polopřímky ℓ jdoucí z x, která ale neprochází ani jedním z konců chordy P. Nechť n, n_1 a n_2 je po řadě počet kolmých průsečíků ℓ s P, P_1 a P_2. Pak $p_C(x) = 1$, protože x je uvnitř C, ale je to také parita součtu $n_1 + n_2$. Tedy jedno z čísel n_1 a n_2 je liché a druhé sudé. Hodnoty $p_{C_1}(x)$ a $p_{C_2}(x)$ jsou po řadě parity součtů $n_1 + n$ a $n_2 + n$. Jeden z nich je tedy zase lichý a druhý sudý, tudíž x leží uvnitř C_1 a vně C_2 nebo naopak.

Důkaz části 2. Argument je velmi podobný části 1, počty n, n_1 a n_2 definujeme stejně, ale nyní jsou čísla n_1 a n_2 obě sudá nebo obě lichá (jejich součet je totiž sudý, protože x je vně C). Tudíž $p_{C_1}(x) = p_{C_2}(x)$ a bod x leží současně uvnitř C_1 i C_2 nebo současně vně C_1 i C_2.

Důkaz části 3. První případ je, že P leží (až na konce) uvnitř C. Lehce se vidí, že vnějšek C je obsažen ve vnějšku C_1 i vnějšku C_2. Tedy naopak vnitřek C_1 i C_2 je obsažen ve vnitřku C. Podle části 1 je tedy vnitřek C rozložen na tři množiny: vnitřek C_1, vnitřek C_2 a vnitřní body chordy P. Tedy vnitřek C bez P je disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených a souvislých množin, vnitřku C_1 a vnitřku C_2, což jsou dvě hledané komponenty.

Druhý případ je, že P leží (až na konce) vně C. S přihlédnutím k části 1 vidíme, že buď vnitřek C leží ve vnitřku C_2 anebo ve vnitřku C_1. Nechť nastává první možnost (druhá je podobná). Takže vnitřek C leží ve vnitřku C_2 a ve vnějšku C_1. Tedy naopak vnějšek C_2 a vnitřek C_1 leží ve vnějšku C. Podle části 2 je tak vnějšek C bez P disjunktní sjednocení dvou neprázdných otevřených a souvislých množin, vnějšku C_2 a vnitřku C_1, což jsou dvě hledané komponenty. Lemma je dokázáno.