Přednáška 4, 13. března 2013

Tvrzení (monotonie ⇒ integrovatelnost). *Je-li funkce* $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ *na intervalu* $[a,b]$ *nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f neklesá (pro nerostoucí f se argumentuje podobně). Pro každý podinterval $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ pak máme $\inf_{[\alpha,\beta]} f = f(\alpha)$ a $\sup_{[\alpha,\beta]} f = f(\beta)$. Buď dáno $\varepsilon>0$. Vezmeme libovolné dělení $D=(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1})$ intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D)<\varepsilon$ a máme

$$\begin{aligned}
S(f,D)-s(f,D) &= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)(\sup_{I_i} f-\inf_{I_i} f)\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)(f(a_{i+1})-f(a_i))\\
&\le \varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}(f(a_{i+1})-f(a_i))\\
&= \varepsilon(f(a_k)-f(a_0))=\varepsilon(f(b)-f(a))\ .
\end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f\in\mathcal{R}(a,b)$. (Kontrolní otázka: proč v předešlém výpočtu nelze místo $\le$ psát $<$?) □

I spojitost postačuje pro integrovatelnost. Musíme se však seznámit s její silnější podobou. Řekneme, že funkce $f:\ I\to\mathbb{R}$, kde I je interval, je *stejnoměrně spojitá* (na I), pokud

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ x,x'\in I,\ |x-x'|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x')|<\varepsilon\ .$$

Požaduje se tedy silněji, aby jediná mez δ fungovala pro všechny dvojice bodů x,x' z I. V obyčejné spojitosti může δ záviset na poloze x a x'. Stejnoměrná spojitost implikuje triviálně spojitost, ale naopak to obecně neplatí. Například funkce

$$f(x)=1/x:\ I=(0,1)\to\mathbb{R}$$

je na I spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá: $f(1/(n+1))-f(1/n)=1$, i když $1/(n+1)-1/n\to 0$ pro $n\to\infty$. Na *kompaktním intervalu* I, což je interval typu $[a,b]$ s $-\infty<a\le b<+\infty$, však naštěstí oba typy spojitosti splývají.

Tvrzení (na kompaktu: spojitost $\Rightarrow$ stejnoměrná spojitost). *Je-li funkce $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ spojitá, je na něm stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ je spojitá v každém bodě intervalu $[a,b]$ (tedy jednostraně v krajních bodech a a b), ale že není na $[a,b]$ stejnoměrně spojitá. Odvodíme spor. Negace stejnoměrné spojitosti znamená, že

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x,x'\in I:\ |x-x'|<\delta\ \&\ |f(x)-f(x')|\ge\varepsilon\ .$$

Což znamená, že pro $\delta=1/n$ a $n=1,2,\ldots$ existují body $x_n,x'_n\in[a,b]$, že $|x_n-x'_n|<1/n$, ale $|f(x_n)-f(x'_n)|\ge\varepsilon$. Díky Bolzanově–Weierstrassově větě ze ZS můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnosti (x_n) a (x'_n) obě konvergují a (nevyhnutelně) k témuž bodu α z $[a,b]$. (Podle této věty existuje posloupnost přir. čísel $k_1<k_2<\ldots$, že (x_{k_n}) konverguje. Opět podle této věty existuje posloupnost přir. čísel $l_1<l_2<\ldots$, že $(x'_{k_{l_n}})$ konverguje. Posloupnost $(x_{k_{l_n}})$ zůstává konvergentní, protože je podposloupností posloupnosti (x_{k_n}). Protože $|x_{k_{l_n}}-x'_{k_{l_n}}|<1/k_{l_n}\le 1/n\to 0$,

$$\lim_{n\to\infty}x_{k_{l_n}}=\lim_{n\to\infty}x'_{k_{l_n}}=\alpha\ .$$

Abychom se vyhnuli vícenásobným indexům, přeznačíme $x_{k_{l_n}}$ jako x_n a $x'_{k_{l_n}}$ jako x'_n.) Podle Heineho definice limity, spojitosti f v bodě α a aritmetiky limit máme

$$0=f(\alpha)-f(\alpha)=\lim f(x_n)-\lim f(x'_n)=\lim(f(x_n)-f(x'_n))\ .$$

Jsme ve sporu s tím, že $|f(x_n)-f(x'_n)|\ge\varepsilon$ pro každé n. $\square$

Tvrzení (spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost). *Je-li funkce $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ na intervalu $[a,b]$ spojitá, potom má Riemannův integrál.*

Důkaz. Nechť f je na $[a,b]$ spojitá. Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle předchozího tvrzení vezmeme $\delta>0$, že $|f(x)-f(x)'|<\varepsilon$ platí, jakmile $x,x'\in[a,b]$ jsou blíže než δ. Tedy

$$\sup_{[\alpha,\beta]}f-\inf_{[\alpha,\beta]}f\le\varepsilon$$

platí pro každý podinterval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ délky menší než δ (proč?). Vezmeme jakékoli dělení $D = (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$ intervalu $[a, b]$ s $\lambda(D) < \delta$ a máme

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f) \\ &\le \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)\varepsilon \\ &= \varepsilon(a_k - a_0) = \varepsilon(b - a) \ . \end{aligned}$$

Tuto mez lze zmenšováním ε učinit libovolně malou. Podle kritéria integrovatelnosti tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$. $\square$

Že monotonie i spojitost postačují k integrovatelnosti jsme dokázali přímo, i když obojí vyplývá hned jako důsledek z Lebesgueovy věty, což si rozmyslete jako cvičení. Zmíníme její další důsledky.

Tvrzení (spojitost(integrovatelnost)=integrovatelnost). *Má-li funkce $f: [a, b] \to [c, d]$ Riemannův integrál a $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ je na $[c, d]$ spojitá, potom má složená funkce $g(f): [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Protože vnější funkce g je omezená, jako spojitá funkce na kompaktním intervalu, je i složená funkce $g(f)$ omezená. Je-li f spojitá v bodě α z $[a, b]$, je i složená funkce $g(f)$ spojitá v α, protože g je spojitá v $f(\alpha)$ a spojitost se skládáním zachovává, jak jsme si dokázali v ZS. Množina M bodů nespojitosti funkce $g(f)$ je tedy obsažena v množině N bodů nespojitosti funkce f. Podle předpokladu a L. věty má N nulovou míru. Takže i M má nulovou míru a podle L. věty má $g(f)$ Riemannův integrál. $\square$

Proto z $f \in \mathcal{R}(a, b)$ plyne například $f^2 \in \mathcal{R}(a, b)$ nebo $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$. Jako cvičení si rozmyslete, proč a jak z $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ plyne, že i

$$fg \in \mathcal{R}(a, b) \quad \text{a} \quad \max(f, g) \in \mathcal{R}(a, b) \ .$$

Nyní se podíváme na linearitu R. integrálu. Nejprve ukážeme linearitu $\int_a^b f$ jako funkce integrandu f, a pak jako funkce integračních mezí a a b.

Tvrzení (linearita $\int$ v integrandu). *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ jsou dvě funkce mající R. integrál a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom i*

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a, b) \quad a \quad \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \ .$$

Důkaz. Stačí prověřit tři speciální případy lineárních kombinací, totiž $-f$, αf s $\alpha \geq 0$ a $f+g$, ostatní se z těchto již odvodí. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle kritéria integrovatelnosti existuje dělení D intervalu $[a,b]$, že

$$S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon \ \& \ S(g,D) - s(g,D) < \varepsilon\ .$$

(Jistě máme dvě taková dělení, D_1 pro f a D_2 pro g. Přechodem ke společnému zjemnění dosáhneme, že $D_1 = D_2$.) Podle definice infima a suprema množiny reálných čísel, pro libovolný podinterval $I \subset [a,b]$ platí, že (pro $\alpha \geq 0$)

$$\inf_I(-f) = -\sup_I f,\ \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f,\ \inf_I(f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

a analogicky pro suprema (prohodíme inf a sup a poslední nerovnost otočíme). Podle definice dolní, popř. horní, sumy jako lineární kombinace (s >0 koeficienty) infim, popř. suprem,

$$S(-f,D) - s(-f,D) = -s(f,D) - (-S(f,D)) = S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon\ ,$$

$$S(\alpha f,D) - s(\alpha f,D) = \alpha S(f,D) - \alpha s(f,D) \leq \alpha\varepsilon\ (\alpha \geq 0)$$

a

$$\begin{aligned} S(f+g,D) - s(f+g,D) &\leq (S(f,D) + S(g,D)) - (s(f,D) + s(g,D)) \\ &= S(f,D) - s(f,D) + S(g,D) - s(g,D) \\ &< 2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Takže, podle kritéria integrovatelnosti, i $-f, \alpha f, f+g \in \mathcal{R}(a,b)$. Navíc, podle nerovností mezi dolními a horními sumami a integrálem, $\int_a^b f \in [s(f,D), S(f,D)]$ a totéž platí pro funkci g. Tedy $\int_a^b(-f)$ leží v intervalu

$$[s(-f,D), S(-f,D)] = [-S(f,D), -s(f,D)] \ni -\int_a^b f$$

a čísla $\int_a^b(-f)$ a $-\int_a^b f$ se tak liší o méně než ε. Tedy $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$. Podobně $\int_a^b \alpha f$ leží v intervalu

$$[s(\alpha f,D), S(\alpha f,D)] = [\alpha s(f,D), \alpha S(f,D)] \ni \alpha\int_a^b f$$

o délce nejvýše $\alpha\varepsilon$, a tak $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. Konečně $\int_a^b (f+g)$ leží v intervalu

$$[s(f+g,D), S(f+g,D)] \subset [s(f,D)+s(g,D), S(f,D)+S(g,D)] \ni \int_a^b f + \int_a^b g$$

o délce méně než 2ε, a tak $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. $\square$

Podle předchozího tvrzení množina riemannovsky integrovatelných funkcí $\mathcal{R}(a,b)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a $f \mapsto \int_a^b f$ je lineární zobrazení z $\mathcal{R}(a,b)$ do $\mathbb{R}$. Říkáme, že R. integrál je *lineární funkcionál.* Předchozí důkaz linearity pomocí dolních a horních sum jsem na přednášce z časových důvodů neuváděl a odvolal jsem se na ekvivalenci obou definic R. integrálu, kterou nebudeme dokazovat.

Věta (ekvivalence obou definic R. $\int$). *Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní: pro každou funkci $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$*

$$\lim_{\lambda(D)\to 0} R(f,D,C) \textit{ existuje} \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}$$

a obě hodnoty, pokud existují, se rovnají.

Jako cvičení si rozmyslete důkaz tvrzení o linearitě $\int$ v integrandu pomocí první definice R. integrálu.

Přejdeme k linearitě $\int$ jako funkce integračních mezí. Nejprve mírně rozšíříme definici $\int_a^b f$:

$$\int_a^a f := 0 \ \text{ a } \ \int_a^b f := -\int_b^a f \ \text{ pro } \ a > b\ .$$

Pro $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ a podinterval $I \subset [a,b]$ označíme zúžení funkce f na I v následujícím tvrzení pro jednoduchost opět jako f.

Tvrzení (linearita $\int$ v integračních mezích). *Nechť $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce a $c \in (a,b)$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(a,b) \iff f \in \mathcal{R}(a,c)\ \&\ f \in \mathcal{R}(c,b)$$

a, jsou-li tyto integrály definované,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\ .$$

Důkaz. Jako $f_1 : [a, c] \to \mathbb{R}$ a $f_2 : [c, b] \to \mathbb{R}$ označíme zúžení funce f na uvedený podinterval. Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D intervalu $[a, b]$, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Můžeme předpokládat (přechodem ke zjemnění), že $c \in D$. Bod c dělí D na dělení D' intervalu $[a, c]$ a dělení D'' intervalu $[c, b]$. Protože $S(f, D) = S(f_1, D') + S(f_2, D'')$ a $s(f, D) = s(f_1, D') + s(f_2, D'')$, z

$$\varepsilon > S(f, D) - s(f, D) = (S(f_1, D') - s(f_1, D')) + (S(f_2, D'') - s(f_2, D''))$$

plyne, díky nezápornosti rozdílu horní a dolní sumy, že i $\varepsilon > S(f_1, D') - s(f_1, D')$ a $\varepsilon > S(f_2, D'') - s(f_2, D'')$. (Obecně samozřejmě z $\gamma > \alpha + \beta$ neplyne, že $\gamma > \alpha$ a $\gamma > \beta$.) Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, $f_1 \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f_2 \in \mathcal{R}(c, b)$. Máme $\int_a^c f_1 \in [s(f_1, D'), S(f_1, D')]$, $\int_c^b f_2 \in [s(f_2, D''), S(f_2, D'')]$ a $\int_a^b f \in [s(f, D), S(f, D)]$, z čehož plyne, že $\int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$ a $\int_a^b f$ se liší o méně než ε. Tedy $\int_a^c f_1 + \int_c^b f_2 = \int_a^b f$.

Nechť $f_1 \in \mathcal{R}(a, c)$ a $f_2 \in \mathcal{R}(c, b)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ podle kritéria integrovatelnosti máme dělení D' intervalu $[a, c]$ a dělení D'' intervalu $[c, b]$, že $S(f_1, D') - s(f_1, D') < \varepsilon$ a $S(f_2, D'') - s(f_2, D'') < \varepsilon$. Sečtením dostaneme

$$2\varepsilon > S(f_1, D') - s(f_1, D') + S(f_2, D'') - s(f_2, D'') = S(f, D) - s(f, D) ,$$

kde D je dělení intervalu $[a, b]$ vzniklé spojením D' a D''. Tedy, podle kritéria integrovatelnosti, i $f \in \mathcal{R}(a, b)$. $\square$

Důsledek ($\int$ přes cyklus je 0). *Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d = \min(a, b, c)$, $e = \max(a, b, c)$ a $f \in \mathcal{R}(d, e)$. Potom následující tři integrály existují a*

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 .$$

Důkaz. Nechť například $d = a < e = c$. Podle předchozího tvrzení máme

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f .$$

Celý součet pak je $\int_a^c f + \int_c^a f = \int_a^c f - \int_a^c f = 0$. Ostatní možnosti jsou podobné. $\square$