4. přednáška z MA II, 8. 3. 2007

Důkaz Tvrzení $1.6\frac{1}{2}$. Pro spor předpokládejme, že $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je spojitá, ale ne stejnoměrně. Pak $\exists\,\varepsilon_0>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\,x,x'\in[a,b]$, že $|x-x'|<\delta$ a $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon_0$. Položme $\delta=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ a odpovídající x,x' označme jako x_n, x_n'. Díky Bolzano-Weierstrassově větě můžeme předpokládat, že $x_n\to L$, $x_n'\to L$ pro $n\to\infty$ a nějaké $L\in[a,b]$. ((x_n) obsahuje konvergentní podposloupnost, takže $x_{k_n}\to L$. Z (x'_{k_n}) vybereme konv. podposloupnost: $x'_{k_{\ell_n}}\to L'$. Tedy $x_{k_{\ell_n}}\to L$, $x'_{k_{\ell_n}}\to L'$. Protože $|x_{k_{\ell_n}}-x'_{k_{\ell_n}}|\to 0$ pro $n\to\infty$, máme $L=L'$.) Pak ale každé δ-okolí bodu L, pro $\delta\to 0$, obsahuje body $x,x'\in(L-\delta,L+\delta)$, že $|f(x)-f(x')|\geq\varepsilon_0$. Tedy f není spojitá v L, což je spor s předpokladem. $\boxtimes$

Cvičení 4. Nalezněte funkci $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, která je omezená a spojitá, ale není stejn. spojitá.

Připomeňme si, že $A \subset \mathbb{R}$ má (Lebesgueovu) míru nula, když pro $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ intervaly $I_1, I_2, \dots$ takové, že $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$. Píšeme, že $\lambda(A) = 0$.

Vlastnosti množin s nulovou mírou:

- A je konečná nebo spočetná $\Rightarrow \lambda(A) = 0$. Např. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
- $A \subset B$ a $\lambda(B) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$.
- $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = \dots = 0 \Rightarrow \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
- Interval s kladnou délkou nemá míru nula.

<u>Lebesgueova věta (V.1.8)</u>: $f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f$ je omezená a $\lambda(N(f)) = 0$, kde $N(f)$ je množina bodů nespojitosti funkce f.

<u>Důsledek</u> Kombinací V.1.6 a V.1.8 dostáváme, že každá monotónní funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je nespojitá jen na množině míry nula. (Ono dokonce platí, že pro monotónní f je $N(f)$ spočetná.)

Cvičení 5 Sestrojte rostoucí funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, pro níž je $N(f)$ nekonečná.

Cvičení 6* Sestrojte rostoucí funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, pro níž $N(f) = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.

$\boxed{\text{Věta 1.9}}$ a) Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

b) Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f : [a,b] \to [c,d]$ a $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ je spojitá (na $[c,d]$). Potom $f \circ g = g(f(x)) \in \mathcal{R}[a,b]$.

Důkaz. a) Pro každé dělení intervalu $[a,b]$ s body (D,C) máme rovnost $R(f, D, C) = \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\alpha f + \beta g)(c_i)$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i)(\alpha f(c_i) + \beta g(c_i))$$

$$= \alpha \sum (a_{i+1} - a_i) f(c_i) + \beta \sum (a_{i+1} - a_i) g(c_i)$$

$= \alpha R(f, D, C) + \beta R(g, D, C)$. Takže, z existence integrálů $\int_a^b f$ a $\int_a^b g$ máme

$$\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g = \alpha \lim_{\lambda(D) \to 0} R(f, D, C) + \beta \lim_{\lambda(D) \to 0} R(g, D, C)$$

$$= \lim_{\lambda(D) \to 0} (\alpha R(f, D, C) + \beta R(g, D, C))$$

$$= \lim_{\lambda(D) \to 0} R(\alpha f + \beta g, D, C) = \int_a^b (\alpha f + \beta g).$$

b) Když je f v bodě $t_0 \in [a,b]$ spojitá, je i složená funkce $f \circ g$ v t_0 spojitá. Odtud plyne, že $N(f \circ g) \subset N(f)$. Dále je g omezená (nabývá maxima i minima), a ~~[illegible]~~ tak i složená funkce $f \circ g$ je omezená. Podle L.-ovy věty máme, že $f \circ g \in \mathcal{R}[a,b]$ $\boxtimes$

Důsledky • Pro $f \in \mathcal{R}[a,b]$ jsou i f^2, $|f|$, atd. R.-ovsky integrovatelné – podle b).

• $f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow fg \in \mathcal{R}[a,b]$. To plyne z a) a z ($f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$) pomocí identity

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2.$$

• Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $a \leq c \leq d \leq b$. Funkci f zúženou na $[c,d]$ označíme znovu jako f a jako $\chi_{[c,d]}$ označíme funkci

$$\chi_{[c,d]}(t) = \begin{cases} 1 & \dots\ t \in [c,d] \\ 0 & \dots\ \text{jinak} \end{cases}$$

(charakteristická funkce intervalu $[c,d]$). Potom i $f \in \mathcal{R}[c,d]$ a $\int_c^d f = \int_a^b f \cdot \chi_{[c,d]}$. (Rozmyslete si to jako cvičení.)

Cvičení 7 $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Dokažte, že i $\max(f,g)$ a $\min(f,g)$ jsou R-ovsky integrovatelné na $[a,b]$. (Tady $\max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x))$.)

V. 1.9.a) nám říká, že $\mathcal{R}[a,b]$ je vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) a zobrazení $f \mapsto \int_a^b f$ je lineární zobrazení z toho vekt. prostoru do (vekt. prostoru) $\mathbb{R}$. Říkáme, že $\int_a^b$ je <u>lineární funkcionál</u> (funkce na funkcích) na $\mathcal{R}[a,b]$.

$$\int_a^a f := 0, \quad \int_b^a f := -\int_a^b f \text{ pro } a \le b.$$

$\boxed{\text{Věta 1.10}}$ Nechť ~~f∈R~~ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $a \le c \le b$. Potom $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \in \mathcal{R}[a,c]$ i $f \in \mathcal{R}[c,b]$.

Navíc $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (když ty integrály existují).

<u>Důkaz.</u> Označme si $g = f|[a,c]$, $h = f|[c,b]$. Pak $N(f) = N(g) \cup N(h)$, f je omezená $\iff$ g i h jsou omezené, takže ekvivalence plyne z Leb. věty.

Nechť tedy $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Podle hořejšího důsledku máme

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(f \cdot \chi_{[a,c]} + f \cdot \chi_{[c,b]} \right) =$$

protože $f(x) = f(x) \cdot \chi_{[a,c]}(x) + f(x) \cdot \chi_{[c,b]}(x)$ pro $\forall x \in [a,b]$ kromě $x = c$, ale na jednom bodu nezáleží

$$= \int_a^b f \cdot \chi_{[a,c]} + \int_a^b f \cdot \chi_{[c,b]} = \int_a^c g + \int_c^b h. \qquad \boxtimes$$

<u>Důsledek</u> Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $d = \min(a,b,c)$, $e = \max(a,b,c)$, $f \in \mathcal{R}[d,e]$. Pak $\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$.

Např. když $a \le b \le c$, máme $\int_c^a f = -\int_a^c f = -\left(\int_a^b f + \int_b^c f \right)$, takže celkem 0, a podobně pro jiná uspořádání bodů a, b, c.

$\boxed{\text{Věta 1.11}}$ (1.7 VA) $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a pro $x \in [a,b]$ definujeme $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. Funkce F je spojitá na $[a,b]$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ pro každý bod spojitosti x_0 funkce f.

Důkaz příště. **Důsledek** Je-li $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá, má na $[a,b]$ primitivní funkci a každá primitivní funkce k f na $[a,b]$ je tvaru

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c,$$ kde c je konstanta.

D. Podle V. 1.7 je spojitá f nutně R.-ovsky integrovatelná, takže ~~[illegible]~~ $\int_a^x f$ existuje a je ~~[illegible]~~ podle V. 1.11 primitivní k f. Víme, že dvě prim. funkce (na intervalu) se liší jen o konstantu. $\boxtimes$

Věta 1.12 (2. ZVA) Je-li $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá na $[a,b]$, potom $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$, kde F je lib. funkce primitivní k f na $[a,b]$.

D. Je to důsledek důsledku: každá prim. fce k f je tvaru $\int_a^x f + c$, takže

$$F(b)-F(a) = \left(\int_a^b f + c\right) - \left(\underbrace{\int_a^a f}_{0} + c\right) = \int_a^b f.$$ $\boxtimes$

Zbývá dokázat V. 1.11. – příště