Přednáška 3, 10. března 2014

Pro dvě množiny v rovině $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ definujeme jejich vzdálenost $d(X, Y)$ jako

$$d(X, Y) := \inf(\{d(x, y) \mid x \in X, y \in Y\})$$

(kde $d(x, y)$ je samozřejmě obvyklá euklidovská vzdálenost v rovině). Pokud se protínají, pak mají zjevně nulovou vzdálenost. Avšak i disjunktní množiny mohou mít nulovou vzdálenost. Nikoli však, pokud jsou kompaktní: jsou-li $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní kompaktní množiny, pak $d(X, Y) > 0$. Kdyby $d(X, Y) = 0$, máme posloupnosti bodů $(x_n) \subset X$ a $(y_n) \subset Y$, že $\lim d(x_n, y_n) = 0$. Díky kompaktnosti X a Y můžeme předpokládat, že obě posloupnosti konvergují a $\lim x_n = a \in X$ a $\lim y_n = b \in Y$. Pak ale, protože vzdálenost je spojitá funkce, $d(a, b) = 0$. Takže bod $a = b$ leží v obou množinách X a Y, což nelze.

Krok K4

Nechť $G = (V, E)$ je rovinný graf s rovinným nakreslením $v \mapsto b_v$ a $e \mapsto K_e$. Předěláme ho na polygonální rovinné nakreslení. Zřejmě lze vzít tak malý poloměr $r > 0$, že uzavřené kruhy $D_v := \overline{B}(b_v, r)$, $v \in V$, jsou vzájemně disjunktní. Pro každou hranu $e = \{u, v\} \in E$ označíme jako $K'_e \subset K_e$ úsek prosté křivky K_e od jejího posledního průsečíku $c_{u,e}$ s D_u (běžíme-li po K_e z b_u do b_v) do prvního po něm následujícího průsečíku $c_{v,e}$ s D_v (rozmyslete si, proč takové průsečíky existují). Takže K'_e je prostá křivka s konci $c_{u,e}$ a $c_{v,e}$. Křivky $K'_e, e \in E$, jsou kompaktní a vzájemně disjunktní, a proto, jak jsme si ujasnili výše, existuje $\delta > 0$, že pro každé dvě různé hrany e a e' mají K'_e a $K'_{e'}$ vzdálenost větší než δ. Vezmeme $\varepsilon > 0$ menší než $\delta/2$ a definujeme množiny

$$X_e := \bigcup_{a \in K'_e} B(a, \varepsilon),\ e \in E\ .$$

Zřejmě je X_e otevřená, $X_e \supset K'_e$ a X_e je souvislá (jinak by, vzhledem k tomu, že každý otevřený kruh $B(a, \varepsilon)$, $a \in K'_e$, je souvislý a protíná K'_e, nesouvislá X_e roztrhla souvislou množinu K'_e). Díky trojúhelníkové nerovnosti a volbě poloměru ε jsou každé dvě množiny X_e a $X_{e'}$, $e \neq e'$, disjunktní. Díky souvislosti a otevřenosti X_e existuje lomená čára $L'_e \subset X_e$ s konci $c_{u,e}$ a $c_{v,e}$. Rozšíříme ji na lomenou čáru L_e přidáním úseček $\overline{b_u c_{u,e}}$ a $\overline{b_v c_{v,e}}$. Protože libovolné dvě z těchto úseček se protínají nejvýše ve společném konci (středu

b_u disku D_u) a L'_e jsou vzájemně disjunktní, vzniklé lomené čáry L_e se nekříží. Přiřazení $e \mapsto L_e$ (spolu s původní reprezentací vrcholů) tak je polygonální rovinné nakreslení grafu G.

Krok K1

Dokážeme, že Jordanova věta o kružnici platí pro polygony. Dokážeme ještě o něco silnější a podrobnější výsledek.

Věta (Jordanova pro polygony). *Nechť $L \subset \mathbb{R}^2$ je topologická kružnice, která je polygonem, takže se L skládá z konečně mnoha úseček. Pak*

$$\mathbb{R}^2 \backslash L = A \,\dot\cup\, B \ ,$$

kde A a B jsou neprázdné otevřené a souvislé množiny. A i B mají jako hranici množinu L. Je-li $u \subset \mathbb{R}^2$ taková úsečka, že $u \cap L$ je jediný bod, jenž je vnitřním bodem u a není vrcholem L, pak jeden konec u leží v A a druhý v B.

Potřebujeme dokázat, že doplněk polygonu v rovině má právě dvě komponenty souvislosti. Nejprve dokážeme, že komponenty jsou alespoň dvě, a pak, že jsou nejvýše dvě.

První část. *Pro každý polygon L v rovině je množina $\mathbb{R}^2 \backslash L$ nesouvislá.* Thomassenova strategie je tato. Pro každý bod $a \in \mathbb{R}^2 \backslash L$ zavedeme tzv. průsečíkové číslo $p(a) \in \{0, 1\}$ (je to parita počtu „kolmých" průsečíků polopřímky jdoucí z a s polygonem L) a dokážeme o něm, že pro dva body a a b z téže komponenty doplňku L je vždy $p(a) = p(b)$. Na druhou stranu lehce najdeme body a a b mimo L s $p(a) = 0$ a $p(b) = 1$. Tedy $\mathbb{R}^2 \backslash L$ má alespoň dvě komponenty.

Nyní podrobněji. Pro bod $a \in \mathbb{R}^2 \backslash L$ označíme polopřímku jdoucí z a ve směru $\varphi \in S^1$, kde S^1 je jednotková kružnice v rovině, jako $\ell(a, \varphi)$. Máme rozklad

$$\ell(a, \varphi) \cap L = I_1 \,\dot\cup\, I_2 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, I_r \ ,$$

kde každý *průsečík* I_i je úsečka nebo bod na $\ell(a, \varphi)$ (což plyne z toho, že $\ell = \ell(a, \varphi)$ je s každou úsečkou v L disjunktní nebo ji protíná v jediném bodě nebo ji celou obsahuje). Řekneme, že I_i leží na ℓ *kolmo*, když dvě úsečky, jež jsou pokračováním L z koncových bodů I_i (resp. z jednoho bodu I_i) leží na opačných stranách od ℓ. Leží-li tyto dvě úsečky na téže straně od ℓ, leží I_i na ℓ *tečně*. Nyní definujeme $p(\ell) \in \{0, 1\}$ jako

$$p(\ell) = p(\ell(a, \varphi)) \equiv r_1 \pmod 2 ,$$

kde r_1 je počet I_i ležících na ℓ kolmo. Pokud $r = 0$, kdy ℓ neprotíná L, je samozřejmě $p(\ell) = 0$.

Nechť $a \in \mathbb{R}^2 \backslash L$. Tvrdíme, že každý směr $\varphi_0 \in S^1$ má okolí $K \subset S^1$ (což je otevřený oblouk v S^1 se středem ve φ_0), že pro $\varphi \in K$ je hodnota $p(\ell(a, \varphi))$ konstantní. Nechť

$$\ell(a, \varphi_0) \cap L = I_1 \dot\cup I_2 \dot\cup \ldots \dot\cup I_r .$$

Pak lze za okolí K vzít každé takové dostatečně malé okolí směru φ_0, že otevřený rovinný úhel $U \subset \mathbb{R}^2$ daný vrcholem a a směry v K (tj. sjednocení polopřímek jdoucích z a ve směrech v K) obsahuje z vrcholů L (tj. konců úseček v L) pouze ty, jež jsou již obsaženy v průniku $\ell(a, \varphi_0) \cap L$. Takové okolí jistě existuje (když vrchol polygonu L na ℓ neleží, tak má od ℓ kladnou vzdálenost). Co se stane s průsečíky I_i, když $\ell(a, \varphi_0)$ pootočíme a nahradíme ji polopřímkou $\ell(a, \varphi)$ s $\varphi \in K$? Díky volbě okolí K máme, že (i) je-li průsečík I_i kolmý, pak při pootočení zůstává kolmým průsečíkem, (ii) je-li průsečík I_i tečný, pak pro $\varphi \neq \varphi_0$ na jedné straně od směru φ_0 zmizí a na druhé straně se rozpadne na dva jednobodové kolmé průsečíky a (iii) polopřímka $\ell(a, \varphi)$, $\varphi \in K$, nemá s L žádné jiné průsečíky mimo těch vzniklých z I_i (ležících na $\ell(a, \varphi_0)$). Takže parita počtu r_1 se pro φ probíhající K nemění (pro $\varphi \neq \varphi_0$ počet r_1 může vzrůst o sudé číslo $2r_2$, kde r_2 je počet rozpadlých tečných průsečíků) a $p(\ell(a, \varphi))$ je pro $\varphi \in K$ konstantní.

Odtud plyne, že $p(\ell(a, \varphi))$ je konstantní pro všechny směry $\varphi \in S^1$. Předchozí odstavec totiž ukazuje, že obě množiny $\{\varphi \in S^1 \mid p(\ell(a, \varphi)) = 0\}$ a $\{\varphi \in S^1 \mid p(\ell(a, \varphi)) = 1\}$, tvořící rozklad S^1, jsou (v euklidovském podprostoru S^1) otevřené. Ale S^1 je souvislá, takže jedna z těchto množin je prázdná a druhá se rovná celé S^1.

Můžeme tedy definovat průsečíkové číslo $p(a) \in \{0, 1\}$ pro bod a mimo L jako hodnotu $p(\ell)$ pro libovolnou polopřímku ℓ jdoucí z a. Lehce se vidí, že pro každou úsečku $u = \overline{ab} \subset \mathbb{R}^2 \backslash L$ je $p(a) = p(b)$ — polopřímka z a obsahující u má s L tytéž průsečíky I_i jako polopřímka z b jdoucí stejným směrem. Protože každé dva body komponenty X množiny $\mathbb{R}^2 \backslash L$ lze v X spojit lomenou čarou, je $p(a)$ pro $a \in X$ konstantní. Vzhledem k omezenosti L je lehké najít bod a mimo L a polopřímku ℓ z něj jdoucí, že $\ell \cap L = \emptyset$, takže

$p(a) = 0$. Nechť $c \in L$ je některý z bodů v L s nejmenší y-ovou souřadnicí. V okolí c snadno najdeme bod b mimo L, že svisle dolů jdoucí polopřímka z b protíná L v jediném bodě, jenž je vnitřním bodem úsečky v L. Takže to je kolmý průsečík a $p(b) = 1$. Tím jsme dokázali, že $\mathbb{R}^2 \backslash L$ má alespoň dvě komponenty.

Druhá část. *Pro každý polygon L v rovině má množina $\mathbb{R}^2 \backslash L$ nejvýše dvě komponenty.*
Thomassenova strategie je následovná. Kolem středu nějaké úsečky u v L opíšeme (uzavřený) disk D s tak malým poloměrem, že $D \cap L = D \cap u$ je pouze úsečka u' půlící D na poloviny D_1 a D_2. Z bodu a mimo L se lomenou čarou v $\mathbb{R}^2 \backslash L$ dostaneme dost blízko k L a pak L obcházíme blízko u L lomenou čarou v $\mathbb{R}^2 \backslash L$ až doputujeme dovnitř D. Dostaneme se tak do D_1 nebo D_2. Máme-li dané libovolné tři různé body mimo L, pro některé dva z nich se při tomto putování dostaneme do téže poloviny D_i. Tyto dva body pak lze spojit v $\mathbb{R}^2 \backslash L$ lomenou čarou a musí ležet v téže komponentě. Takže $\mathbb{R}^2 \backslash L$ nemůže mít tři různé komponenty. Thomassen už ve svém důkazu nic víc nepíše. Hales v článku [1] poznamenává, že není úplně lehké proměnit tuto intuitivně jasnou strategii v rigorózní, neřkuli formalizovaný, důkaz.

Nyní podrobněji. Nechť $a_i \in \mathbb{R}^2 \backslash L$, $i = 1, 2, 3$, jsou tři různé body mimo L. Lehce se vidí, že existují takové tři lomené čáry M_i, že M_i má jeden konec a_i, druhý konec b_i leží na L a kromě něj celá M_i leží v $\mathbb{R}^2 \backslash L$. Malou úpravou poslední úsečky v M_i snadno dosáhneme toho, že b_i není vrchol L, tj. je vnitřním bodem nějaké úsečky v L (to zjednoduší pozdější diskuzi).

Sestrojíme takové dvě množiny U_l a U_p, že (i) $U_l, U_p \subset \mathbb{R}^2 \backslash L$, (ii) U_l i U_p je souvislá a (iii) každá z lomených čar M_1, M_2, M_3 protíná U_l nebo U_p.

Odtud už zjevně plyne, že některé dva z bodů a_1, a_2, a_3 leží ve stejné komponentě množiny $\mathbb{R}^2 \backslash L$. Ta má tedy nejvýše dvě komponenty. Množiny U_l a U_p budou konečná sjednocení úseček v rovině.

Nechť je polygon L dán posloupností úseček $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1} = u_1$, kde pro $j = 1, 2, \ldots, k$ mají $u_j = \overline{c_j d_j}$ a u_{j+1} společný konec $d_j = c_{j+1}$. Jako p_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, označíme přímku jdoucí bodem d_j, která půlí (vnitřní i vnější) úhel u d_j mezi sousedními úsečkami u_j a u_{j+1}. Pro $\delta > 0$ a $j = 1, 2, \ldots, k$ jako $q_{j,l}(\delta)$ a $q_{j,p}(\delta)$ označíme dvě různé přímky, jež jsou rovnoběžné s úsečkou u_j a leží v levé, respektive pravé, polorovině ve vzdálenosti δ od (přímky jdoucí) u_j. (Úsečka $u_j = \overline{c_j d_j}$ je orientovaná od c_j k d_j, což určuje levou a pravou stranu.) Jako $v_{j,l}(\delta)$, resp. $v_{j,p}(\delta)$, označíme úsečku (která může zdegenerovat do jednoho bodu) spojující průsečíky přímek p_j a p_{j-1} s přímkou $q_{j,l}(\delta)$, resp. s přímkou $q_{j,p}(\delta)$. Hledané dvě množiny definujeme jako

$$U_l = \bigcup_{j=1}^{k} v_{j,l}(\delta) \ \text{ a } \ U_p = \bigcup_{j=1}^{k} v_{j,p}(\delta) \ .$$

Dokážeme, že pro každé dostatečně malé $\delta > 0$ mají U_l a U_p tři požadované vlastnosti.

Vlastnost (ii), souvislost, je jasná a platí pro každé $\delta > 0$. Všechny úsečky $v_{j,l}(\delta)$ a $v_{j,p}(\delta)$ jsou souvislé a díky symetrii jejich geometrické definice mají $v_{j,l}(\delta)$ a $v_{j+1,l}(\delta)$ společný konec (ležící na přímce p_j) a stejně tak $v_{j,p}(\delta)$ a $v_{j+1,p}(\delta)$. Sjednocení tedy dávají souvislé množiny (proč přesně?). Klíčová je vlastnost (i), že ani U_l ani U_p pro malé $\delta > 0$ neprotíná L. Ukážeme, že to platí pro U_l, pro U_p je důkaz stejný. Stačí dokázat, že pro každé dva indexy $j, j' \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existuje $\delta_0 > 0$, že $v_{j,l}(\delta) \cap u_{j'} = \emptyset$ jakmile $0 < \delta < \delta_0$. Vezmeme třeba $j = 2$ (pro jiné j je argument velmi podobný). Z definice jsou úsečky $v_{2,l}(\delta)$ a u_2 disjunktní pro každé $\delta > 0$ (běží rovnoběžně ve vzdálenosti δ). Když se přímky p_1 a p_2 v levé polorovině od u_2 neprotínají, neprotíná $v_{2,l}(\delta)$ ani u_1 ani u_3 pro žádné $\delta > 0$. Když se p_1 a p_2 nalevo od u_2 protínají v bodě e, pak je $v_{2,l}(\delta)$ disjunktní s u_1 i u_3 pro každé δ menší než vzdálenost bodu e od přímky jdoucí úsečkou u_2. Když je index j' různý od $1, 2, 3$, jsou úsečky u_2 a $u_{j'}$ disjunktní a tedy mají kladnou vzdálenost $d(u_2, u_{j'}) = \gamma > 0$ (viz začátek přednášky). Z definice je jasné, že pro $\delta \to 0$ i $d(u_2, v_{2,l}(\delta)) \to 0$. Pro každé dosti malé δ (kdy je tato vzdálenost menší než $\gamma/2$) je tedy $v_{2,l}(\delta) \cap u_{j'} = \emptyset$. Tím je disjunktnost U_l a L pro malé δ dokázána. Zbývá vlastnost (iii). Ukážeme, že pro dosti malé δ lomená čára M_1 protíná U_l nebo U_p (pro M_2 a M_3 je argument stejný). Víme, že konec b_1 čáry M_1 je vnitřním bodem nějaké úsečky v L, řekněme u_1. Nechť $\overline{eb_1}$ je poslední úsečka čáry M_1 a $\overline{eb_1}$ leží napravo od u_1. (Leží-li $\overline{eb_1}$ nalevo od u_1, vyměníme jen $v_{1,p}(\delta)$ za $v_{1,l}(\delta)$ a U_p za U_l.) Lehce se vidí, že pro dosti malé $r > 0$ každá úsečka, která leží vpravo od u_1 a jejíž konce mají od konců úsečky u_1 vzdálenosti menší než r, protíná $\overline{eb_1}$. Protože $v_{1,p}(\delta)$ tak leží a pro $\delta \to 0$ její konce limití ke koncům u_1, pro každé malé δ je $v_{1,p}(\delta) \cap \overline{eb_1} \neq \emptyset$ a tedy i $U_p \cap M_1 \neq \emptyset$. Tím je důkaz druhé části kompletní.

Dokázali jsme tedy, že pro každý polygon L má $\mathbb{R}^2 \backslash L$ právě dvě komponenty. Protíná-li úsečka u polygon L jak je popsáno, je průsečík kolmý a konce u mají různá průsečíková čísla, tudíž leží v různých komponentách. Odtud snadno plyne, že hranice obou komponent je přesně L.