

Přednáška 3, 6. března 2013

Když $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ a $D' = (b_0, b_1, \dots, b_l)$ jsou dělení intervalu $[a, b]$ a $D \subset D'$, to jest pro každé $i = 0, 1, \dots, k$ existuje j , že $a_i = b_j$ (tudíž $k \leq l$), řekneme, že D' je zjemnění D nebo že D' zjemňuje D .

Lemma. *Když $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a D, D' jsou dvě dělení $[a, b]$, přičemž D' zjemňuje D , pak*

$$s(f, D') \geq s(f, D) \quad \text{a} \quad S(f, D') \leq S(f, D).$$

Důkaz. Uvážíme-li definici sum $s(f, D)$ a $S(f, D)$ a to, že D' lze vytvořit z D postupným přidáváním bodů, vidíme, že obě nerovnosti stačí dokázat v situaci, kdy $D = (a_0 = a < a_1 = b)$ a $D' = (a'_0 = a < a'_1 < a'_2 = b)$. Podle definice infim hodnot funkce f máme

$$m_0 = \inf_{a_0 \leq x \leq a_1} f(x) \leq \inf_{a'_0 \leq x \leq a'_1} f(x) = m'_0 \quad \text{a} \quad m_0 \leq \inf_{a'_1 \leq x \leq a'_2} f(x) = m'_1.$$

Tedy

$$\begin{aligned} s(f, D') &= (a'_1 - a'_0)m'_0 + (a'_2 - a'_1)m'_1 \\ &\geq (a'_1 - a'_0)m_0 + (a'_2 - a'_1)m_0 \\ &= (a'_2 - a'_0)m_0 = (b - a)m_0 \\ &= s(f, D). \end{aligned}$$

Nerovnost $S(f, D') \leq S(f, D)$ se dokáže podobně. □

Důsledek. *Když $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a D, D' jsou dvě dělení $[a, b]$, pak*

$$s(f, D) \leq S(f, D').$$

Důkaz. Nechť $E = D \cup D'$ je společné zjemnění obou dělení. Podle předešlého lemmatu máme

$$s(f, D) \leq s(f, E) \leq S(f, E) \leq S(f, D').$$

Přesněji, první a poslední nerovnost platí podle Lemmatu, a prostřední je triviální, z definice horní a dolní sumy. □

Tvrzení (dolní integrál nepřesahuje horní). *Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$ a D, D' jsou dvě dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí nerovnosti*

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq S(f, D') \leq M(b-a).$$

Důkaz. První a poslední nerovnost jsou speciální případy Lemmatu. Druhá a předposlední nerovnost plynou hned z definice dolního a horního integrálu jakožto suprema, respektive infima. Podle Důsledku je každý prvek množiny dolních sum, jejíž supremum je $\int_a^b f$, menší či roven každému prvku množiny horních sum, jejíž infimum je $\overline{\int_a^b f}$. S použitím definice infima (největší dolní mez) a suprema (nejmenší horní mez) odtud vyplývá prostřední nerovnost: Pro každé dělení D je $s(f, D)$ dolní mezí druhé množiny, tedy $s(f, D) \leq \overline{\int_a^b f}$, tedy $\overline{\int_a^b f}$ je horní mezí první množiny, tedy $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$. \square

Tvrzení (kritérium integrovatelnosti). *Nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom*

$$f \in \mathcal{R}(a, b) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists D : 0 \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, f má Riemannův integrál, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je pro nějaké dělení D intervalu $[a, b]$ odpovídající horní suma o méně než ε větší než odpovídající dolní suma.

Důkaz. Implikace \Rightarrow . Předpokládáme, že f má na $[a, b]$ R. integrál, tedy $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f \in \mathbb{R}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního integrálu existují dělení E_1 a E_2 tak, že

$$s(f, E_1) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad S(f, E_2) < \overline{\int_a^b f} + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podle lemmatu tyto nerovnosti platí i po náhradě E_1 a E_2 jejich společným zjemněním $D = E_1 \cup E_2$. Sečtením obou nerovností dostaneme

$$S(f, D) - s(f, D) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} + \left(- \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon.$$

Implikace \Leftarrow . Předpokládáme platnost uvedené podmínky s ε a D . Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme odpovídající dělení D a podle definice dolního a horního integrálu dostaneme

$$\overline{\int_a^b f} \leq S(f, D) < s(f, D) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b f} + \varepsilon, \text{ tedy } \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} < \varepsilon.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tak podle předchozího tvrzení máme $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f} \in \mathbb{R}$. Tedy f má na $[a, b]$ R. integrál. \square

Příklad (omezená funkce bez integrálu). Funkce $f : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ definovaná jako $f(\alpha) = 1$, když α je racionální číslo, a $f(\alpha) = 0$, když α je iracionální, již se říká Dirichletova funkce, nemá na $[0, 1]$ R. integrál, i když je omezená.

To je jasné, každý interval (s kladnou délkou) obsahuje body, kde má f hodnotu 0 a rovněž i body, kde má hodnotu 1. Tedy $s(f, D) = 0$ a $S(f, D) = 1$ pro každé dělení D a

$$\underline{\int_0^1 f} = 0 < \overline{\int_0^1 f} = 1.$$

Jako druhý příklad spočteme podle definice, že

$$\int_0^1 x^2 dx = 1/3.$$

Pro $n = 1, 2, \dots$ vezmeme dělení $D_n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Pak

$$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 = n^{-3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)$$

a podobně

$$S(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right)^2 = n^{-3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2).$$

Tedy $S(f, D_n) - s(f, D_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$ a $f(x) = x^2$ má na $[0, 1]$ R. integrál podle předchozího kritéria. Stačí ukázat, že pro $n \rightarrow \infty$ je

$$S_n := 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n^3/3 + O(n^2).$$

Protože $1 + 2 + \dots + n \leq n^2$, z

$$(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{i=1}^n ((i+1)^3 - i^3) = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1) = 3S_n + 3 \sum_{i=1}^n i + n$$

opravdu máme, že

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} - \sum_{i=1}^n i = n^3/3 + O(n^2).$$

Henri Lebesgue (1877–1941) dokázal větu charakterizující funkce s Riemannovým integrálem, kterou si uvedeme bez důkazu. Nejprve ale zavedeme množiny míry nula. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou (Lebesgueovu) míru*, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost intervalů I_1, I_2, \dots taková, že

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon \text{ a } M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

Definice říká, že se M dá pokrýt intervaly libovolně malé celkové délky. Uvedeme základní vlastnosti množin reálných čísel s nulovou mírou. Důkazy si rozmyslete jako cvičení.

- Každá konečná nebo spočetná množina má nulovou míru.
- Podmnožina množiny s nulovou mírou má také nulovou míru.
- Má-li každá z množin A_1, A_2, \dots nulovou míru, má i jejich sjednocení

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

nulovou míru.

- Interval s kladnou délkou nemá nulovou míru.

Například celá množina racionálních čísel \mathbb{Q} má nulovou míru.

Věta (Lebesgueova, charakterizující integrovatelné funkce) *Funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má Riemannův integrál, právě když je omezená a množina jejích bodů nespojitosti má nulovou míru.*

Otázka posluchače. *Existuje nespočetná množina reálných čísel s nulovou mírou?*

Existuje. Klasickým příkladem je tzv. *Cantorovo diskontinuum*. Je to množina

$$X_C := \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{3^n}] \cup [\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}] \cup [\frac{4}{3^n}, \frac{5}{3^n}] \cup [\frac{6}{3^n}, \frac{7}{3^n}] \cup \dots \cup [\frac{3^n-1}{3^n}, 1]$$

— to, co zbude z intervalu $[0, 1]$ vyhodíme-li prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pak prostřední třetinu z každé z obou zbylých krajních třetin, tj. pak vyhodíme $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, pak vyhodíme z každé ze zbylých čtyřech devítin její prostřední třetinu a tak dále do nekonečna. Jinými slovy

$$X_C = \{ \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / 3^i \mid a_i \in \{0, 2\} \}$$

— X_C jsou právě ta čísla z $[0, 1]$, v jejichž rozvoji při základu 3 se vyskytují pouze cifry 0 a 2 (a nikde cifra 1). Například

$$1/3 = (0.02222\dots)_3 \in X_C \quad \text{nebo} \quad 1/4 = (0.020202\dots)_3 \in X_C,$$

ale $5/8 = (0.121212\dots)_3 \notin X_C$. Z této korespondence s nekonečnými posloupnostmi 0 a 2 je vidět, že X_C je nespočetná. Není ani těžké ukázat, že má nulovou míru (cvičení).