3. přednáška z MA II, 1. 3. 2007

Důkaz Věty 1.4. Dokážeme nejprve a). Implikace $\Leftarrow$. Pro (každé) $\varepsilon > 0$ máme dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $0 \le S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Protože $\underline{\int_a^b} f \ge s(f,D)$ a $\overline{\int_a^b} f \le S(f,D)$ (podle definice), máme i $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$ a navíc $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$ (T. 1.2.c)), máme $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ a $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$. Podle definice $\underline{\int_a^b}$, resp. $\overline{\int_a^b}$, jako suprema, resp. infima, pro dané $\varepsilon/2 > 0$ máme dvě dělení D_1 a D_2 taková, že

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D_1) \le I \le S(f,D_2) < I + \varepsilon/2.$$

Vezmeme jejich společné zjemnění $E = D_1 \cup D_2$ a (podle T.1.2.a)) máme $s(f,D_1) \le s(f,E) \le S(f,E) \le S(f,D_2)$. Takže $0 \le S(f,E) - s(f,E) < \varepsilon$.

Dokážeme b). Implikace $\Leftarrow$. Platí podle a), protože tato podmínka implikuje splnění podmínky v a), a tak $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Pro dané $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ tedy podle a) existuje dělení D takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \frac{\varepsilon}{2}$. Označme k počet intervalků v D. Dále nechť $c > 0$ splňuje $c > |f(x)|\ \forall x \in [a,b]$ (protože $f \in \mathcal{R}[a,b]$, je f omezená podle T. 1.1). Zvolíme $\delta > 0$ tak malé, že $3k\delta c < \varepsilon/4$. Nechť D' je libovolné dělení $[a,b]$ s $\lambda(D') < \delta$. Podle T. 1.3 máme $S(f,D') - s(f,D') \leq$

$$\leq S(f,D) + 3k\delta c - (s(f,D) - 3k\delta c)$$

$$= S(f,D) - s(f,D) + 6k\delta c$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$ Tedy $S(f,D') - s(f,D') < \varepsilon$. $\boxtimes$

Nyní dokážeme ekvivalenci obou definic R-ova integrálu. Připomeňme si jednoduché (ne)rovnosti

$$s(f,D) \leq R(f,D,C) \leq S(f,D) \quad \text{a}$$

$$s(f,D) = \inf_C R(f,D,C), \quad S(f,D) = \sup_C R(f,D,C).$$

Věta 1.5 (ekvivalence obou definic)

Obě definice Riemannova integrálu jsou ekvivalentní a dávají pro něj tutéž hodnotu.

D. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Nechť $\mathbb{R} \ni I = \int_a^b f$ podle 2. def.,

tj. $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta > 0$ tajištění podle V. 1.4. b). Pro každé dělení D s $\lambda(D) < \delta$ pak máme $s(f, D) \le I \le S(f, D)$ a $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Ale pro každou volbu bodů C v dělení D ($C = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$, $c_i \in [a_i, a_{i+1}]$, kde $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$) máme triviální nerovnost $s(f,D) \le R(f,D,C) \le S(f,D)$. Tudíž $|I - R(f,D,C)| < \varepsilon$. Tedy $I = \int_a^b f$ i podle 1. definice.

Nechť $I = \int_a^b f$ podle 1. def., tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, že $\forall (D,C)$ dělení $[a,b]$ s body splňující $\lambda(D) < \delta$ máme $|I - R(f,D,C)| < \varepsilon$. Pro dané $\varepsilon/2 > 0$ nyní vezmeme odpovídající $\delta > 0$ a libovolné dělení D s $\lambda(D) < \delta$. Protože $s(f,D) = \inf_C R(f,D,C)$ a podobně pro horní sumu, máme

$$|I - s(f,D)| = |I - \inf_C R(f,D,C)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{a}$$

$$|I - S(f,D)| = |I - \sup_C R(f,D,C)| \leq \varepsilon/2 \,.$$ Podle

Δ-ové nerovnosti máme $S(f,D) - s(f,D) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. To platí pro každé ε. Podle V. 1.4 (a) nebo b)) máme $f \in R[a,b]$ (podle 2. definice). Dále je jasné, že $\sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) = I$, takže $I = \int_a^b f$ i podle 2. definice. $\boxtimes$

Poznámka. Výhoda 2. def. R-ova integrálu je její praktičnost, dobře se s ní pracuje. Nevýhodou je, že pro ~~definici~~ (zavedení čísel) $m_i = \inf_{I_i} f$ a $M_i = \sup_{I_i} f$ potřebuje lin. uspořádání na oboru hodnot funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Chceme-li pracovat s funkcemi s hodnotami v $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ apod. a integrovat je, přestává 2. definice fungovat. Zde má pak výhodu 1. definice, která lin. uspořádání na oboru hodnot funkce f nepotřebuje.

$\boxed{\text{Věta 1.6}}$ (monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost)

Když je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotónní (je neklesající nebo nerostoucí), potom je na $[a,b]$ R-ovsky integrovatelná!

D. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ buď neklesající (pro nerostoucí funkci podobně) a nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vezmeme $0<\delta<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (pokud $f(b)=f(a)$, tj. f je konstantní, vezmeme $\delta>0$ libovolně) a libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D)<\delta$. Pak

$$S(f,D)-s(f,D)=\sum_{i=0}^{k-1}(a_{i+1}-a_i)(\sup_{I_i} f-\inf_{I_i} f)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{<\delta} \left(f(a_{i+1}) - f(a_i) \right)$$

$$< \delta \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(a_{i+1}) - f(a_i) \right) = \delta \left(f(a_k) - f(a_0) \right)$$

$= \delta \left(f(b) - f(a) \right) < \varepsilon$. Podle V. 1.4 tedy $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ⊠

Dokážeme, že ze spojitosti f též plyne integrovatelnost.

$\boxed{\text{Věta 1.7}}$ (f spojitá $\Rightarrow f \in \mathcal{R}[a,b]$)

Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, je i $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Pro důkaz ale budeme potřebovat pojem stejnoměrné spojitosti. Zopakujme si:

$J \subset \mathbb{R}$ je interval, pak $f : J \to \mathbb{R}$ je na J <u>spojitá</u>, když $\forall x \in J \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x' \in J, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Řekneme, že f je na J <u>stejnoměrně spojitá</u>, když $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x, x' \in J, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

U spojité f může δ záviset ne jen na ε, ale také na x. U stejnoměrně spojité f pro dané ε jedno δ fungují pro všechny x z J.

Je-li f s. spojitá, je i spojitá, ale naopak to obecně (pro špatné intervaly J) neplatí.

Například $f(x) = 1/x$ je na $J = (0,1)$ spojitá, ale není tam stejnoměrně spojitá: pro $x, x+\delta \in (0,1)$ a pevné $\delta > 0$ máme $|f(x+\delta) - f(x)| = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} =$
$$= \frac{\delta}{x(x+\delta)} \to +\infty \text{ pro } x \to 0+.$$

Nicméně pro dobré intervaly J jsou spojitost a stejnoměrná spojitost ekvivalentní pojmy:

$\boxed{\text{Tvrzení } 1.6\tfrac{1}{2}}$ (spojitost na kompaktním intervalu implikuje stejn. spojitost)

Je-li $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ spojitá, je i stejnoměrně spojitá.

<u>Důkaz</u> odložíme do příští přednášky. ☒

<u>Důkaz Věty 1.7.</u> Nechť je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a je dané $\varepsilon > 0$. Podle T. $1.6\frac{1}{2}$ zvolím $\delta > 0$ tak, že $x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Pak, pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D) < \delta$, platí

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_{I\in D} |I| \cdot \underbrace{(\sup_I f - \inf_I f)}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} <$$

$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{I\in D} |I| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon$, protože rozdíl $\sup_I f - \inf_I f$ mohu lib. přesně aproximovat rozdílem $f(x)-f(x')$ pro nějaké $x, x' \in I$ a $|I|<\delta$. Takže $f \in \mathcal{R}[a,b]$ podle V. 1.4. $\boxtimes$

Henri Lebesgue (1875–1941)

$\boxed{\text{Věta 1.8}}$ (Lebesgueova charakterizace R-ovsky integrovatelných funkcí)

$f\in\mathcal{R}[a,b] \iff f$ je omezená a množina jejích bodů nespojitosti ($M = \{x_0 \in [a,b] : f$ není v bodě x_0 spojitá$\}$) má míru nula, tj. $\forall \varepsilon>0 \ \exists$ posloupnost intervalů $I_1, I_2, I_3, \dots$ takových, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon \quad \& \quad M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Tuto větu nebudeme dokazovat. Na její důsledky se podíváme příště.