Přednáška 2, 12. října 2015

Připomeňme si látku o metrických prostorech vyloženou v závěru LS v MAII (viz zápisy z těchto přednášek na webu). Nechť (M, d) je MP. *Koule se středem v bodě $a \in M$ a poloměrem* $\mathbb{R} \ni r > 0$ je množina

$$B(a, r) = \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \; .$$

Množina $X \subset M$ je *otevřená*, když pro každý bod $a \in X$ existuje poloměr $r > 0$, že $B(a, r) \subset X$. Doplňky otevřených množin do M jsou takzvané *uzavřené* množiny. Definice *konvergence* a *limity* v obecném MP-u je zřejmá: pro posloupnost $(a_n) \subset M$ a bod $a \in M$

$$\lim a_n = a \;\; \text{znamená, že} \;\; \lim d(a_n, a) = 0 \; ,$$

čímž jsme vše převedli na konvergenci na reálné ose. Definici lze vyslovit i v ε-δ formě. To učiníme pro definici spojitého zobrazení mezi dvěma MP-y: je-li (N, e) další MP, zobrazení $f : M \to N$ je spojité, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall a \in M \; \exists \delta > 0 : \; f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

(první koule je podmnožina M a druhá N). Vlastnosti otevřených a uzavřených množin a spojitých zobrazení:

- Množiny $\emptyset$ a M jsou vždy otevřené i uzavřené. Sjednocení (resp. průnik) libovolně mnoha otevřených (resp. uzavřených) množin je otevřená (resp. uzavřená) množina. Průnik (resp. sjednocení) konečně mnoha otevřených (resp. uzavřených) množin je otevřená (resp. uzavřená) množina.
- Množina $A \subset M$ je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset A$ je i $\lim a_n \in A$.
- Zobrazení $f : M \to N$ mezi MP-y je spojité, právě když každá otevřená množina $Y \subset N$ má v f otevřený vzor:

  $$f^{-1}(Y) = \{x \in M \mid f(x) \in Y\}$$

  je otevřená podmnožina M (tzv. *topologická definice spojitosti*).

Dokažme si poslední vlastnost (tento důkaz v LS nebyl). Nechť je zobrazení f spojité podle definice, $Y \subset N$ je otevřená množina a $a \in f^{-1}(Y)$. Tedy $f(a) \in Y$. Díky otevřenosti Y je $B(f(a), r) \subset Y$ pro nějaké $r > 0$ a díky spojitosti f pak existuje $s > 0$, že $f(B(a, s)) \subset B(f(a), r) \subset Y$. Tedy $B(a, s) \subset f^{-1}(Y)$. Ukázali, jsme, že $f^{-1}(Y)$ je otevřená množina v M. Naopak, nechť je f topologicky spojité zobrazení a jsou dány $a \in M$ a $\varepsilon > 0$. Koule $B(f(a), \varepsilon) \subset N$ je otevřená množina (úloha 1) a díky topologické spojitosti f je $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ otevřená množina v M, která obsahuje bod a. Tedy existuje poloměr $\delta > 0$, že $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Což znamená, že $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$ — f je spojité zobrazení podle definice.

Kompaktní množiny. Podmnožina $A \subset M$ MP-u (M, d) je *kompaktní*, má-li každá posloupnost $(a_n) \subset A$ konvergentní podposloupnost s limitou v A. Podmnožina $A \subset M$ je *omezená*, když $A \subset B(a, r)$ pro nějakou kouli v M.

Vlastnosti kompaktních množin:

- Je-li (M, d) kompaktní MP a $A \subset M$ je uzavřená, pak je A kompaktní.
- Je-li A kompaktní, potom je A uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí.
- Opačná implikace platí v euklidovských prostorech: $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní $\iff$ A je uzavřená a omezená.
- Je-li $f : M \to N$ spojité zobrazení mezi MP-y a $A \subset M$ je kompaktní podmnožina, potom je $f(A)$ kompaktní podmnožina N.
- (Princip maxima/minima) Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá reálná funkce a $A \subset M$ je kompaktní podmnožina, pak množina $f(A) \subset \mathbb{R}$ má minimum i maximum, tj. f na A nabývá nejmenší i největší hodnotu. Existují tedy body $a, b \in A$, že
$$f(a) \le f(x) \le f(b) \ \forall x \in A \,.$$

Konečně jsme si v LS uvedli i topologickou definici kompaktnosti, jejíž ekvivalenci s původní definicí dokážeme příště. Řekneme, že $A \subset M$ je *topologicky kompaktní*, když každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M pokrývající A (tak zvané *otevřené pokrytí* A) — $\bigcup_{i\in I} X_i \supset A$ — má konečný podsystém $\{X_i \mid i \in J\}$, $J \subset I$ je konečná, který stále pokrývá A.

Věta (Heineho–Borelova věta). *Množina A v metrickém prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Jako aplikaci pojmu kompaktnosti si nyní dokážeme tzv. *Základní větu algebry.*

Věta (Základní věta algebry). *Nechť*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0,\ n \geq 1$$

je nekonstantní komplexní polynom. Pak existuje $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$ — $p(z)$ má alespoň jeden kořen.

Důkaz. Plyne to ze dvou vlastností zobrazení $f:\ \mathbb{C} \to [0, +\infty)$, kde $f(z) = |p(z)|$:

1. $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = +\infty$ stejnoměrně v z, to jest pro každé $r \geq 0$ existuje $R > 0$, že $|z| > R \Rightarrow |p(z)| > r$.

2. Pro každé $\beta \in \mathbb{C}$ s $f(\beta) > 0$ existuje $\gamma \in \mathbb{C}$, že $0 \leq f(\gamma) < f(\beta)$.

Ukážeme, jak z obou vlastností vyplývá existence kořene. Položíme $r = f(0) = |p(0)| = |a_0|$. Podle 1 vezmeme $R > 0$, že $|z| > R \Rightarrow f(z) > f(0)$. Protože je disk

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$$

kompaktní podmnožina $\mathbb{C}$ (je uzavřená a omezená a $\mathbb{C}$ je vlastně euklidovský prostor $\mathbb{R}^2$) a f je spojitá funkce, existuje (podle principu maxima/minima) $\alpha \in D$, že $f(\alpha) \leq f(z)$ pro každé $z \in D$. Ale $0 \in D$, takže podle definice R i $f(\alpha) \leq f(0) < f(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \backslash D$ a $f(\alpha)$ je nejmenší hodnota f na celém $\mathbb{C}$. Z vlastnosti 2 ovšem plyne, že $f(\alpha) > 0$ nemůže nastat, tedy $f(\alpha) = 0$ a α je kořenem polynomu $p(z)$.

Dokázat vlastnost 1 je snadné. Máme rozklad

$$p(z) = z^n(a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}) =: z^n(a_n + q(z))\ ,$$

v němž $\lim_{|z| \to \infty} q(z) = 0$. Pro dané $r \geq 0$ stačí vzít tak velké $R > 0$, aby platilo, že $R^n |a_n|/2 > r$ a $|z| > R \Rightarrow |q(z)| < |a_n|/2$. Pak skutečně

$$|z| > R \Rightarrow |p(z)| \geq |z|^n(|a_n| - |q(z)|) > R^n |a_n|/2 > r\ .$$

Dokázat vlastnost 2 je těžší. Důkaz je založen na speciálním případu ZVA:

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ existuje $\beta \in \mathbb{C}$, že $\beta^k = \alpha$. Polynom $z^k - \alpha$ má tedy alespoň jeden kořen.

Je to dobře známá vlastnost komplexních čísel a máme dokonce přesně k různých k-tých odmocnin z čísla $\alpha \neq 0$ (a jen jednu, $\beta = 0$, z $\alpha = 0$):

$$\beta_j = |\alpha|^{1/k}(\cos((2\pi j + \arg\alpha)/k) + i\sin((2\pi j + \arg\alpha)/k),\ j = 0, 1, \ldots, k-1\ ,$$

kde $\arg\alpha \in [0, 2\pi)$ je délka oblouku kladně (proti směru ručiček) orientované jednotkové kružnice v $\mathbb{C}$ od bodu 1 do bodu $\alpha/|\alpha|$. (Ale co je to sin a co je to cos a jak spočítat délku oblouku kružnice daného nikoli úhlem ale koncovými body? Viz úloha 11.)

Dokažme tedy pomocí odmocňování komplexních čísel vlastnost 2. Změnou proměnné $u = z - \beta$ můžeme předpokládat, že $\beta = 0$ (úloha 12). Předpokládáme tedy, že $a_0 \neq 0$ (jinak je 0 kořenem) a hledáme $\gamma \in \mathbb{C}$, že

$$|p(\gamma)| < |p(0)| = |a_0|\ .$$

Užijeme rozklad

$$p(z) = a_0 + a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots + a_n z^n =: a_0 + a_k z^k + r(z)\ ,$$

v němž $a_k \neq 0$, $1 \leq k \leq n$ a $\lim_{z \to 0} r(z)/z^k = 0$. Pro malé reálné $\delta > 0$ položíme

$$\gamma = \delta(-a_0/a_k)^{1/k} \neq 0\ ,$$

kde $(-a_0/a_k)^{1/k}$ je nějaká k-tá odmocnina z čísla $-a_0/a_k$. Vezmeme δ tak malé, že $|a_k\gamma^k| < |a_0|$ a $|r(\gamma)| < |a_k\gamma^k|/2$, což podle definice γ a vlastnosti $r(z)$ lze. Pak skutečně

$$\begin{aligned}
|p(\gamma)| &= |a_0 + a_k\gamma^k + r(\gamma)| \leq |a_0 + a_k\gamma^k| + |r(\gamma)| \\
&= |a_0| - |a_k\gamma^k| + |r(\gamma)| < |a_0| - |a_k\gamma^k|/2 \\
&< |a_0|\ .
\end{aligned}$$

Klíčová je zde poslední rovnost, jež plyne z faktu, že argumenty čísel a_0 a $a_k\gamma^k$ se liší právě o π — jako vektory směřují opačnými směry a při sečtení se délka zmenší. Zbytek je trojúhelníková nerovnost. $\square$

Úlohy

1. Dokažte, že v metrickém prostoru (M, d) je každá koule $B(a, r)$ otevřená množina a každá *uzavřená koule* $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\}$ uzavřená množina.

2. Je konečná množina v MP-u vždy uzavřená?

3. Množina v MP-u je *obojetná*, je-li současně otevřená i uzavřená. Nalezněte všechny obojetné množiny euklidovské roviny $\mathbb{R}^2$.

4. Nalezněte všechny obojetné množiny *diskrétního* MP-u; v něm mají každé dva různé body vzdálenost 1.

5. Kdy je diskrétní MP kompaktní?

6. Ukažte na příkladu, že nekonečné sjednocení uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Podobně pro průnik a otevřené množiny.

7. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Je uzavřená koule $\overline{B}(f, 1)$ v MP-u $(\mathcal{C}[a, b], d_{\max})$ funkcí spojitých na $[a, b]$, s maximovou metrikou, kompaktní?

8. Rozhodněte, zda průnik dvou kompaktních množin je kompaktní množina, a totéž pro sjednocení.

9. Tatáž otázka pro nekonečná sjednocení a nekonečné průniky.

10. Nechť $K \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená koule (kruh) v euklidovské rovině se středem v počátku a poloměrem 1, která je pokrytá otevřenou množinou $A \supset K$. Dokažte, že
$$\inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^2 \setminus A} \|x - y\| > 0 \ .$$

11. Podejte co možná nejelementárnější důkaz faktu, že každé komplexní číslo má k-tou odmocninu pro každé $k \in \mathbb{N}$.

12. Rozmyslete si, co se přesně myslí tou změnou proměnné na konci důkazu ZVA a jak z ní plyne, že stačí uvažovat jen případ $\beta = 0$.