Přednáška 2, 3. března 2014

Hlavní a překvapivý obrat v Thomassenově důkazu je poslední krok, který ukazuje, že Jordanova věta je ekvivalentní s nerovinností grafu $K_{3,3}$. Dokážeme, že neplatnost J. věty implikuje rovinnost $K_{3,3}$. Opačnou implikaci, že platnost J. věty implikuje nerovinnost $K_{3,3}$, znáte z Diskrétní matematiky a tato implikace byla známa dávno.

Krok K5

Nechť je topologická kružnice $C \subset \mathbb{R}^2$ protipříkladem k Jordanově větě. Otevřená množina $\mathbb{R}^2 \backslash C$ je tedy souvislá nebo má alespoň tři komponenty. V obou případech z C vyrobíme rovinné nakreslení grafu $K_{3,3}$. Na přednášce jsem kreslil řadu obrázků, zde se pro úsporu času obejdu bez nich (ale vřele doporučuju si je kreslit).

První případ. *Množina $\mathbb{R}^2 \backslash C$ je souvislá.* Vzhledem ke kompaktnosti C existuje jednoznačně určená svislá přímka L_1, že $L_1 \cap C \neq \emptyset$ a C leží celá v pravé uzavřené polorovině určené L_1. Podobně definujeme přímku L_2, ale pomocí levé poloroviny. Pás mezi L_1 a L_2 je tedy nejužší svislý uzavřený pás obsahující C. Necht p_1 (resp. p_2) je nejvyšší bod průniku $L_1 \cap C$ (resp. $L_2 \cap C$), oba body existují díky kompaktnosti a neprázdnosti obou průniků. Tyto dva různé body rozdělují C na dvě prosté křivky P_1 a P_2, které obě mají konce p_1 a p_2 (ale jinak jsou disjunktní a $P_1 \cup P_2 = C$). Nechť L_3 je libovolná svislá přímka ležící mezi L_1 a L_2. Tvrdíme, že L_3 obsahuje úsečku $L_4 = \overline{ab}$, která má jeden konec $a \in P_1$ a druhý $b \in P_2$, ale její vnitřek leží v $\mathbb{R}^2 \backslash C$. Plyne to z kompaktnosti a neprázdnosti obou průniků $L_3 \cap P_1$ a $L_3 \cap P_2$. ($L_3 \cap P_1 \neq \emptyset$ a $L_3 \cap P_2 \neq \emptyset$, protože máme rozklad na levou a pravou otevřenou polorovinu $\mathbb{R}^2 \backslash L_3 = H_l \dot\cup H_p$, což jsou otevřené množiny, a P_1 i P_2 je souvislá a má jeden konec v H_l a druhý v H_p.) Abychom to dokázali, vezmeme dva libovolné body $a' \in L_3 \cap P_1$ a $b' \in L_3 \cap P_2$, patrně $a' \neq b'$. Nechť $a' < b'$, případ $a' > b'$ je podobný (teď porovnáváme vlastně y-ové souřadnice bodů na L_3). Nechť a je supremum bodů $\overline{a'b'} \cap P_1$, patrně $a' \leq a < b'$, a b je infimum bodů $\overline{ab'} \cap P_2$. Lehce se vidí, že $a \in P_1$, $b \in P_2$ a že za L_4 lze vzít úsečku $\overline{ab}$. Nechť L_5 je lomená čára se dvěma zlomy a konci p_1 a p_2, která se skládá ze svislé úsečky na L_1 s dolním koncem p_1, vodorovné úsečky spojující L_1 a L_2 a ležící nad C a svislé úsečky na L_2 s dolním koncem p_2. Díky definici bodů p_1 a p_2 a omezenosti C taková lomená čára existuje.

Patrně vnitřek L_5 leží v $\mathbb{R}^2\backslash C$ a $L_5 \cap L_4 = \emptyset$. Nechť d' je nějaký vnitřní bod L_5 a c' nějaký vnitřní bod L_4. Protože $c', d' \in \mathbb{R}^2\backslash C$ a to je otevřená souvislá množina, existuje lomená čára $L_6' \subset \mathbb{R}^2\backslash C$ s konci c' a d'. Nechť, jdeme-li po L_6' z c' do d', je c poslední průsečík L_6' a L_4 a d je první po něm následující průsečík L_6' a L_5. Nechť L_6 je lomená čára, jež je úsekem L_6' mezi c a d. Je jasné, že L_6 má konec c na L_4, konec d na L_5, $L_6 \subset \mathbb{R}^2\backslash C$ a kromě svých konců je L_6 disjunktní s L_4 i L_5.

Uvažme nyní nakreslení grafu dané šesti (různými) vrcholy/body

$$\{p_1, p_2, c\} \dot\cup \{d, a, b\}$$

a devíti hranami/prostými křivkami

$$\{L_{5,1}, P_{1,1}, P_{2,1};\ L_{5,2}, P_{1,2}, P_{2,2};\ L_6, L_{4,1}, L_{4,2}\}\ .$$

Zde $L_{5,1}$ (resp. $L_{5,2}$) je úsek L_5 mezi p_1 a d (resp. mezi d a p_2), $P_{1,1}$ (resp. $P_{1,2}$) je úsek P_1 mezi p_1 a a (resp. mezi a a p_2), $P_{2,1}$ (resp. $P_{2,2}$) je úsek P_2 mezi p_1 a b (resp. mezi b a p_2), $L_{4,1} = \overline{ca}$ a $L_{4,2} = \overline{cb}$. Lehce se ověří, že to je nakreslení grafu $K_{3,3}$ (i-tý vrchol z první množiny spojuje s j-tým vrcholem z druhé množiny j-tá hrana z i-té trojice hran). Lehce se vidí, že se žádné dvě hrany nekříží: $P_1, P_2 \subset C$ a mají jen společné konce, vnitřky L_4, L_5 a L_6 leží v $\mathbb{R}^2\backslash C$ a jsou disjunktní. Je to tedy rovinné nakreslení grafu $K_{3,3}$.

Druhý případ. *Množina $\mathbb{R}^2\backslash C$ má alespoň tři komponenty.* Zde se opřeme o krok K2, že doplněk prosté křivky v rovině je souvislý. Použijeme i pomocné lemma.

Lemma. *Nechť $K \subset C$ je oblouk C (tj. prostá křivka), X je komponenta množiny $\mathbb{R}^2\backslash C$ a $a \in X$. Pak existuje lomená čára M, že jeden její konec je a, druhý je vnitřní bod K a celá M až na konec v K leží v X.*
Abychom to dokázali, vezmeme ještě bod $c \in Y$, kde Y je komponenta množiny $\mathbb{R}^2\backslash C$ různá od X, a L definujeme jako oblouk C doplňkový ke K, tj. C minus vnitřek K. Protože, podle K2, je $\mathbb{R}^2\backslash L$ otevřená a souvislá, existuje lomená čára $M' \subset \mathbb{R}^2$ s konci a a c, která neprotíná L. M' však musí protnout C, protože M' je souvislá a její konce leží v různých komponentách doplňku C. Takže M' protíná vnitřek K. Běžíme po M' z a do c a jako M vezmeme úsek M' do prvního průsečíku s K.

Po lemmatu popíšeme rovinné nakreslení grafu $K_{3,3}$. Nechť $X_i \subset \mathbb{R}^2\backslash C$, $i = 1, 2, 3$, jsou tři různé komponenty. Na C zvolíme nějaké tři disjunktní oblouky $K_i \subset C$, $i = 1, 2, 3$. Soustřeďme se na X_1 (pro druhé dvě komponenty je argument stejný). Zvolíme libovolný bod $a \in X_1$. Podle Lemmatu existuje lomená čára $M_1 \subset X_1$ (až na konec) a spojující a s bodem uvnitř K_1. Stejně definujeme M_2 pro a a oblouk K_2. Běžíme-li po M_2 z konce v K_2 až do prvního průsečíku s M_1, a pak po M_1 až do konce v K_1, dostaneme lomenou čáru M_3, jejíž jeden konec je v K_1, druhý v K_2, ale vnitřek M_3 leží v X_1. Nyní vezmeme libovolný vnitřní bod $a' \in M_3$ a znovu použijeme Lemma. Existuje lomená čára $M_4 \subset X_1$ (až na konec) a spojující a' s vnitřním bodem K_3. Běžíme-li po M_4 z konce v K_3 až do prvního průsečíku s M_3, dostaneme polygonální rovinné nakreslení N_1 grafu $K_{1,3}$, které celé s vyjímkou tří konců v K_1, K_2 a K_3 leží v X_1. V komponentách X_2 a X_3 máme obdobná nakreslení grafu $K_{1,3}$, jež označíme jako N_2 a N_3. Dohromady tvoří N_1, N_2 a N_3 polygonální rovinné nakreslení N': každé N_i je polygonální rovinné nakreslení a N_1, N_2, N_3 jsou až na konce na C disjunktní, neboť leží v různých komponentách doplňku C. Je lehké propojit až tři různé konce nakreslení N' v každém oblouku K_i pomocí nekřížících se podoblouků oblouku K_i do jednoho bodu. Tím dostaneme rovinné nakreslení N grafu $K_{3,3}$ (N se skládá z N' a případně několika oblouků z C, není tedy obecně polygonální).

Poznámka. Na přednášce jsem druhý případ bohužel vykládal zbytečně komplikovaně a nesprávně. Argument zde popsaný je mnohem jednodušší a doufejme správný. Je možná i o něco jednodušší než Thomassenova argumentace (ten v každé komponentě X_i fixuje bod a pak vyrábí nakreslení $K_{3,3}$ s těmito vrcholy; jak vidíme výše, není vůbec nutné vrchol v X_i předem fixovat).