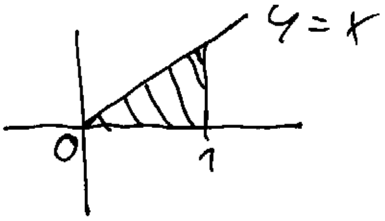
2. přednáška z MA II, 1.3.2007

Příklad Spočtěme plochu



$[a,b]=[0,1]$

$f(x)=x$

tj. integrál $\int_0^1 x\,dx$. $D=(0, 1/n, 2/n, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$

$$s(f,D)=\sum_0^{n-1}|I_i|\cdot\inf_{I_i} f=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{i}{n}=\frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n-1)=$$

$$S(f,D)=\sum_0^{n-1}|I_i|\cdot\sup_{I_i} f=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{i+1}{n}=\frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)=$$

$$\left.\begin{array}{l}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\\[2ex] =\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\end{array}\right\}\ \underline{\int_0^1}=\overline{\int_0^1}=\int_0^1=1/2\text{, podle}$$

$n\to\infty$

T. 1.2.c.

Příklad • Dirichletova funkce $f(x)=\begin{cases}1\dots & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0\dots & \text{jinak}\end{cases}$

$[a,b]=[0,1]$

$\rightsquigarrow \underline{\int_0^1}=0\ (s(f,D)=0\ \forall D)$, $\overline{\int_0^1}=1\ (S(f,D)=1-0=1\ \forall D)$,

a tak $f\notin\mathcal{R}[0,1]$.

• Riemannova funkce $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}\dots & x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0\dots & \text{jinak}\end{cases}$ m a n nesoudělné

$[a,b]=[0,1]$

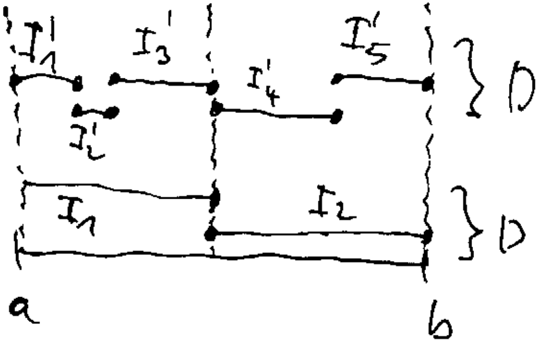
$\underline{\int_0^1}=0\ (s(f,D)=0\ \forall D)$, $\overline{\int_0^1}=$?? uvidíme později.

Cvičení 2 Spočtěte $\underline{\int_0^1}$ a $\overline{\int_0^1}$ pro $f(x) = \begin{cases} 1/x \cdots x \in (0,1] \\ 0 \cdots x = 0. \end{cases}$

Cvičení 3 Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $f(x) \neq g(x)$ jen pro konečně mnoho x. Dokažte: $f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\int_a^b f = \int_a^b g$, existuje-li.

Důkaz Tvrzení 1.2.

a) Nechť D' zjemňuje D:



$$s(f,D') = |I'_1| \cdot m'_1 + \cdots + |I'_5| \cdot m'_5 =$$

$$(m'_i = \inf_{I'_i} f)$$

$$= (|I'_1| m'_1 + \cdots + |I'_3| m'_3) + (|I'_4| m'_4 + |I'_5| m'_5)$$

$$\geq m_1 \cdot (|I'_1| + \cdots + |I'_3|) + m_2 \cdot (|I'_4| + |I'_5|) = m_1 \cdot |I_1| + m_2 |I_2|$$

$= s(f,D)$, protože $m'_1, m'_2, m'_3 \geq m_1$
$m'_4, m'_5 \geq m_2$ $\quad (m_i = \inf_{I_i} f)$

$(A \subset B \subset \mathbb{R} \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B))$. Nerovnost pro horní součty se dokazuje podobně

b) D, D' buďte dělení $[a,b]$, pak $E = D \cup D'$ je zjemnění jak D tak D'. Podle a) proto máme

$s(f,D) \le s(f,E) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triv. nerovnost}}}{\le} S(f,E) \le S(f,D')$ a tedy

$s(f,D) \le S(f,D')$.

c)

$$m(b-a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speciální} \\ \text{případ a)}}}{\le} s(f,D) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definice} \\ \text{d. integrálu}}}{\le} \underline{\int_a^b} f \underset{\uparrow}{\le} \overline{\int_a^b} f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definice} \\ \text{h. integrálu}}}{\le} S(f,D') \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speciální} \\ \text{případ a)}}}{\le} M(b-a)$$

podle b) máme $\underbrace{\{s(f,D) : D \text{ dělení } [a,b]\}} \le \underbrace{\{S(f,D) : -\|-\}}$

takže $\sup(\swarrow) \le \inf(\swarrow)$ ⊠

Tvrzení 1.3. (rafinovaná nerovnost pro $s(f,D)$ a $S(f,D)$)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ buď omezená:

$|f(x)| < c$ $\forall x \in [a,b]$ pro nějakou konstantu $c > 0$.

Nechť D, D' jsou dělení $[a,b]$, přičemž $|D| = k+1$ (tj. D má k intervalků I_i) a $\lambda(D') < \delta$. Potom

$s(f,D') \ge s(f,D) - 3kc\delta$ a $S(f,D') \le S(f,D) + 3kc\delta$.

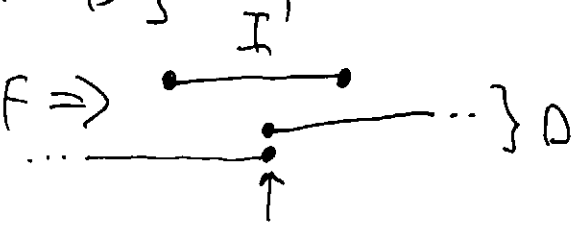
Pro pevné dělení D tedy každé dostatečně jemné dělení D' dává skoro stejně dobrou dolní sumu a podobně pro horní sumy.

Důkaz. Dokážeme opět jen první nerovnost, důkaz druhé je podobný.

$D' = E \dot{\cup} F$, kde $E = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interválek } [a'_i, a'_{i+1}]}}{I'} \in D' : I' \subset J$ pro nějaký interválek $J \in D \}$ a

$F = \{$ostatní intervalky $I' \in D'\}$.

👁 $|F| \le k-1 < k$ ($I' \in F \Rightarrow$



, takže každý $I' \in F$ obsahuje uvnitř některý z bodů $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ dělení D a takových I' je tedy nanejvýš $k-1$.)

$$s(f, D') = \sum_{I' \in D'} |I'| \cdot \inf_{I'} f = \sum_{E} |I'| \cdot \inf_{I'} f + \sum_{F} |I'| \cdot \inf_{I'} f.$$

První sumu rozdělíme na podsumy podle těch J:

$$\sum_E -''- = \sum_{J \in D} \sum_{\substack{I' \in D' \\ I' \subset J}} |I'| \cdot \inf_{I'} f.$$ Druhá suma není moc velká: $$\Big|\sum_F -''-\Big| \le \sum_F \overbrace{|I'|}^{<\delta} \cdot \overbrace{\big|\inf_{I'} f\big|}^{\le c} < k\delta c.$$

Dále, jak už víme, $\inf_{I'} f \ge \inf_J f$, když $I' \subset J$.

Takže $$\sum_E -''- \ge \sum_{J \in D} \inf_J f \sum_{\substack{I' \in D' \\ I' \subset J}} |I'| \ge \sum_{J \in D} \inf_J f \cdot (|J| - 2\delta),$$

protože $I' \in D'$ obsažené v $J \in D$ nepokrývají případně počáteční úsek J o délce < δ a podobný koncový úsek, ale jinak pokrývají celý zbytek J. První suma je tedy velká alespoň jako

$$\sum_{J\in D} |J|\cdot \inf_J f - \sum_{J\in D} \inf_J f\cdot 2\delta$$

$\geq s(f,D) - 2k\delta c$, protože $\left|\sum_{J\in D} \inf_J f\cdot 2\delta\right| = \left|2\delta \sum_{J\in D} \inf_J f\right|$

$\leq 2\delta c \sum_{J\in D} 1 = 2k\delta c.$

Celkem $s(f,D') \geq \sum_{E}$ -‖- $- k\delta c$

$$\geq s(f,D) - 2k\delta c - k\delta c$$

$$= s(f,D) - 3k\delta c.$$ ☒

$\boxed{\text{Věta 1.4}}$ (Kritérium integrovatelnosti)

Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

a) $f\in\mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon>0\ \exists$ dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $0\leq S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$.

b) $f\in\mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ s $\lambda(D)<\delta$ máme $0\leq S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$.

Pozn. V a) stačí jedno D splňující tu nerovnost, v b) to chceme po každém D s $\lambda(D)<\delta$.