Přednáška 1, 24. února 2014

Kapitola 1. Jordanova věta o kružnici.

Topologická kružnice v (euklidovské rovině) $\mathbb{R}^2$ je množina

$$C = f([0,1]) = \{f(x) \mid 0 \le x \le 1\} ,$$

kde $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojité zobrazení (mezi euklidovskými metrickými prostory), které je prosté až na rovnost $f(0) = f(1)$. Ekvivalentně řečeno, C je homeomorfní jednotkové euklidovské kružnici $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$. V první kapitole dokážeme následující známou větu.

Věta (Jordan, 1887). *Nechť $C \subset \mathbb{R}^2$ je topologická kružnice. Pak*

$$\mathbb{R}^2 \backslash C = A \dot\cup B ,$$

kde A a B jsou neprázdné otevřené a souvislé množiny.

Zde a dále symbol $\dot\cup$ označuje disjunktní sjednocení, takže $A \cap B = \emptyset$. Věta říká, že po vyhození jakékoli topologické kružnice C z roviny nastane totéž jako po vyhození obyčejné kružnice S^1 — rovina se rozpadne na dvě souvislé části, vnitřek a vnějšek kružnice C. Větu dokázal v učebnici analýzy před více než 120 lety francouzský matematik C. Jordan [3]. Před více než 20 lety dánský matematik C. Thomassen [5] nalezl její (relativně) jednoduchý kombinatorický důkaz, který si na prosemináři předvedeme.

Nejprve ale připomeneme pojmy a výsledky kolem souvislosti množin v metrických prostorech (většinu už jste slyšeli v MAIII). MP $M = (M, d)$ je *nesouvislý*, obsahuje-li netriviální obojetnou podmnožinu (množinu různou od $\emptyset$ i M, jež je otevřená i uzavřená). Ekvivalentně, M je nesouvislý, právě když existuje rozklad $M = A \dot\cup B$, kde A a B jsou neprázdné otevřené množiny. V opačném případě řekneme, že M je *souvislý*. Podmnožina $X \subset M$ je *(ne)souvislá*, je-li podprostor $X = (X, d) = (X, d \mid X \times X)$ (ne)souvislý. Následující fakta jsme si uvedli a možná i dokázali v MAIII (důkazy jsou jednoduché):

- Podmnožina $[0,1] \subset \mathbb{R}$ (euklidovského prostoru) je souvislá. Totéž samozřejmě platí pro libovolný interval.

- Je-li $f: M \to N$ spojité zobrazení mezi MP-y a M je souvislý, je obraz $f(M)$ souvislá podmnožina v N.

Odtud hned plyne, že každá *křivka* $K = f([0,1])$, kde $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojité zobrazení, je souvislá podmnožina roviny. Speciálně každá *prostá křivka* (kdy navíc požadujeme prosté f) a každá topologická kružnice je souvislá podmnožina roviny. *Konce či koncové body křivky* K jsou body $f(0)$ a $f(1)$.

Lomená čára $L \subset \mathbb{R}^2$ je po částech lineární prostá křivka. Jde o sjednocení konečně mnoha úseček $u_i = \overline{v_i v_{i+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, v rovině, přičemž společné koncové body $v_2, v_3, \ldots, v_k$ dvou po sobě jdoucích úseček u_i a u_{i+1} jsou jediné průsečíky všech úseček. Když navíc $v_{k+1} = v_1$, nazveme L *polygonem* (je to sám sebe neprotínající mnohoúhelník). Polygon je tedy zvláštní topologická kružnice, tvořená konečně mnoha úsečkami. L je samozřejmě souvislá.

Tvrzení (souvislost otevřených množin). *Otevřená množina $X \subset \mathbb{R}^2$ je souvislá, právě když každé dva body $a, b \in X$ lze v X spojit lomenou čarou (tj. existuje lomená čára $L \subset X$ s konci a a b).*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$. Nechť je X nesouvislá: $X = A \dot\cup B$, kde A a B jsou jako výše. Vezmeme body $a \in A$, $b \in B$ a spojíme je lomenou čarou $L \subset X$. Pak ale rozklad $L = (L \cap A) \dot\cup (L \cap B)$ ukazuje, že L je nesouvislá, což tak není.

Implikace $\Rightarrow$. Nechť je X souvislá. Na X definujeme binární relaci $\sim$: $a \sim b$, právě když body $a, b \in X$ lze v X spojit lomenou čarou. Je to relace ekvivalence. Reflexivita a symetrie relace $\sim$ jsou triviální, ne tak již tranzitivita: když l. čára $K \subset X$ spojuje a a b a l. čára $L \subset X$ spojuje b a c, není obecně $K \cup L$ l. čára, vzhledem k možným průsečíkům K a L. Z $K \cup L$ ale snadno vyrobíme l. čáru $M \subset K \cup L$ spojující a a c: po K běžíme z a až do prvního průsečíku K a L, a pak po L až do c. Takovýchto manipulací s l. čarami uvidíme v důkazu J. věty ještě více. Množinu X tak rozložíme na třídy ekvivalence relace $\sim$:

$$X = \dot{\bigcup_{i \in I}} X_i \ .$$

Stačí ukázat, že každá třída X_i je otevřená množina. Pro $|I| > 1$ by totiž třída X_i a sjednocení ostatních tříd roztrhly X a způsobily její nesouvislost. Proto je jen jedna třída ekvivalence a každé dva body X lze spojit v X l. čarou. Otevřenost X_i je však jasná: když $a \in X_i$, vezmeme malý poloměr $r > 0$, že koule $B(a, r) \subset X$, a pak pro každý bod $b \in B(a, r)$ úsečka spojující a a b leží v X, takže $b \sim a$ a $B(a, r) \subset X_i$. $\square$

Důsledek (komponenty). *Každá otevřená množina $X \subset \mathbb{R}^2$ má jednoznačný rozklad*

$$X = \dot{\bigcup_{i \in I}} X_i$$

na vzhledem k inkluzi maximální souvislé podmnožiny, jimž se říká komponenty či komponenty souvislosti *množiny X. Každá X_i je otevřená množina.*

Důkaz. Za X_i vezmeme třídy ekvivalence relace $\sim$ z předchozího důkazu. Jsou to otevřené souvislé množiny. Když $X_i \subset A \subset X$, $A \neq X_i$, pak A není souvislá (X_i a sjednocení X_j s $j \neq i$ ji roztrhne). Takže každá X_i je maximální souvislá podmnožina. Pro jiný rozklad $X = \dot{\bigcup}_{j \in J} Y_j$ na maximální souvislé podmnožiny se stejným argumentem snadno ukáže, že jde pouze o permutaci původního rozkladu na třídy X_i. □

Komponenty souvislosti se definují i pro obecné množiny, nám postačí jejich zavedení pro otevřené množiny v rovině.

I když Jordanovu větu zatím nemáme dokázanou, můžeme jednoznačně definovat vnějšek topologické kružnice C. Pro to je dobré si uvědomit, že C jako spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Důsledek (vnějšek). *Nechť $C \subset \mathbb{R}^2$ je topologická kružnice. Pak právě jedna z komponent souvislosti v*

$$\mathbb{R}^2 \backslash C = \dot{\bigcup_{i \in I}} X_i$$

je neomezená otevřená množina. Říkáme jí vnějšek kružnice C.

Důkaz. C je kompaktní, tedy omezená množina. Snadno tak nalezneme přímku $L \subset \mathbb{R}^2 \backslash C$. L je neomezená a souvislá, leží tedy celá v některé komponentě X_i doplňku C, jež je tedy též neomezená. Nechť X_i a X_j jsou dvě (různé) neomezené komponenty doplňku C. Díky neomezenosti X_i a X_j a omezenosti C snadno najdeme lomenou čáru $L \subset \mathbb{R}^2 \backslash C$ (dokonce jen s jedním zlomem), která má jeden konec v X_i a druhý v X_j. Komponenty doplňku C pak ale roztrhávají L a ukazují, že L je nesouvislá, což je spor. Takže doplněk C má jen jedinou neomezenou komponentu. □

Pro Thomassenův důkaz Jordanovy věty jsou důležitá rovinná nakreslení grafů, hlavně grafu $K_{3,3}$. Následující jistě znáte z Diskrétní matematiky, pro úplnost ale potřebné pojmy připomenu. *Graf* $G = (V, E)$ se skládá z konečné množiny *vrcholů* V a množiny *hran* $E \subset \binom{V}{2}$. Graf $K_{3,3} = (V, E)$ je graf se šesti vrcholy a devíti hranami, daný rozkladem $V = A \dot{\cup} B$ vrcholů na dvě tříprvkové množiny: $E = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B\}$. *Nakreslení grafu* $G = (V, E)$ (v rovině) jsou dvě přiřazení, $V \ni v \mapsto b_v \in \mathbb{R}^2$ a $E \ni e \mapsto K_e \subset \mathbb{R}^2$, přičemž první je injekce z V do roviny, každá K_e je prostá křivka a pro $e = \{u, v\}$ má K_e konce b_u a b_v. Dvě prosté křivky $K, L \subset \mathbb{R}^2$ *se nekříží*, když $K \cap L = \emptyset$ nebo $K \cap L = \{a\}$, kde a je společný konec K a L. Nakreslení grafu G je *rovinné*, pokud se v něm žádné dvě hrany (tj. je reprezentující prosté křivky) nekříží. G je *rovinný graf*, když má rovinné nakreslení. *Polygonální rovinné nakreslení* grafu G je jeho rovinné nakreslení, v němž je každá hrana reprezentována lomenou čarou.

Hlavní kroky Thomassenova důkazu Jordanovy věty o kružnici jsou:

K1. Jordanova věta o kružnici platí pro polygony.

K2. Je-li $K \subset \mathbb{R}^2$ prostá křivka, potom je $\mathbb{R}^2 \backslash K$ otevřená souvislá množina.

K3. Graf $K_{3,3}$ nemá polygonální rovinné nakreslení.

K4. Má-li graf $G = (V, E)$ rovinné nakreslení, pak má i polygonální rovinné nakreslení.

K5. Když Jordanova věta o kružnici neplatí, potom má graf $K_{3,3}$ rovinné nakreslení.

Tyto kroky dokazují Jordanovu větu o kružnici: kdyby neplatila, má podle K5 a K4 graf $K_{3,3}$ polygonální rovinné nakreslení, což ale není podle K3 možné. Tvrzení K1 použijeme pro důkaz K3 a K2 pro důkaz K5.

Než se pustíme do vlastního důkazu, kde začneme posledním krokem K5, uvedu ještě pár zajímavostí z historie Jordanovy věty. Jordanův důkaz v [3] byl po čase kritizován jako neúplný či přímo jako chybný, např. O. Veblenem, který v [7] uveřejnil svůj vlastní důkaz. Později matematici uveřejnili řadu dalších důkazů, vedle již zmíněného Thomassenova např. H. Tverberg [6]. V češtině lze nalézt důkaz Jordanovy věty v knize [4, kapitola X.5] A. Pultra. V r. 2005 americký matematik T. C. Hales dokončil formalizovaný důkaz Jordanovy věty, který byl ověřen počítačem, viz zajímavý článek [1]. V jiném článku [2] Hales rehabilituje původní Jordanův důkaz (a také naopak poukazuje na vážné nedostatky Veblenova důkazu, vzhledem k jeho problematickým množinovým základům).

Reference

[1] T. C. Hales, The Jordan curve theorem, formally and informally, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 882–894.

[2] T. C. Hales, Jordan's proof of the Jordan curve theorem, *Studies in logic, grammar and rhetoric* **10** (2007), 45–60.

[3] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'Ècole Polytechnique,* Gauthier-Villars, Paris, 1887.

[4] A. Pultr, *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL, Praha, 1986.

[5] C. Thomassen, The Jordan–Schönflies theorem and the classification of surfaces, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 116–130.

[6] H. Tverberg, A proof of the Jordan curve theorem, *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 34–38.

[7] O. Veblen, Theory on plane curves in non-metrical analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), 83–98.