1. přednáška 1. října 2007

Kapitola 1. Metrické prostory.

Definice MP, izometrie. *Metrický prostor* je struktura formalizující jev vzdálenosti. Je to dvojice (M, d) složená z množiny M a funkce dvou proměnných

$$d:\ M \times M \to \mathbf{R},$$

tak zvané *metriky*, splňující tři axiomy:

a) $d(x,y) \geq 0$ (nezápornost) a $d(x,y) = d(y,x)$ (symetrie),
b) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ a
c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (trojúhelníková nerovnost).

Nezápornost metriky v a) se nemusí požadovat, plyne z axiomů b) a c).

Izometrie metrických prostorů (M,d) a (N,e) je bijekce $f:\ M \to N$ zachovávající vzdálenosti: $d(x,y) = e(f(x), f(y))$ pro všechny $x, y \in M$. Existuje-li taková bijekce, jsou prostory (M,d) a (N,e) *izometrické*, prakticky nerozlišitelné, izomorfní.

Příklady metrických prostorů. V následujících příkladech se axiomy a) a b) ověří obvykle snadno (nicméně viz úlohu 7). Dokázat trojúhelníkovou nerovnost bývá často obtížnější, viz závěrečné úlohy.

Příklad 1. $M = \mathbf{R}^n$ a $p \geq 1$ je reálné číslo. Na M definujeme metriky $d_p(x,y)$ vztahem

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$. Pro $n = 1$ dostáváme klasickou metriku $|x - y|$ na $\mathbf{R}$ a pro $p = 2, n \geq 2$ *euklidovskou metriku*

$$d_2(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Euklidovskými prostory rozumíme metrické prostory $(\mathbf{R}^n, d_2)$ s euklidovskou metrikou. Pro $p = 1, n \geq 2$ dostáváme *pošťáckou metriku*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

a pro $p \to \infty$ *maximovou metriku*

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Příklad 2. Za M vezmeme množinu všech omezených funkcí $f:\ X \to \mathbf{R}$ definovaných na množině X. Na M pak máme *supremovou metriku*

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Pokud $M = \mathcal{C}[a,b]$ (množina reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$), supremum se nabývá a máme *maximovou metriku*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Příklad 3. Vezmeme $M = \mathcal{C}[a,b]$ a reálné číslo $p \geq 1$. Podobně jako v prvním příkladu máme na M metriky

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Hodnota $p = 1$ dává *integrální metriku* a $p \to \infty$ dává maximovou metriku z druhého příkladu. Důležitý je opět případ $p = 2$. Co je na exponentu $p = 2$ zvláštního? Ukazuje se, že metrika $d_2(\cdot,\cdot)$, v prvním i ve třetím příkladu, je odvozena ze skalárního součinu na vektorovém prostoru, a proto má řadu pěkných a důležitých vlastností. Vrátíme se k tomu v závěru první kapitoly.

Vezmeme-li širší třídu funkcí $M = \mathcal{R}[a,b]$ (funce mající na $[a,b]$ Riemannův integrál), je $d_p(f,g)$ definovaná, ale nesplňuje axiom b) a nedostáváme metriku. Změníme-li například hodnotu funkce $f \in \mathcal{R}[a,b]$ v jediném bodě, dostaneme odlišnou funkci $f_0 \in \mathcal{R}[a,b]$, ale $d_p(f,f_0) = 0$. (Tato potíž se odstraní tak, že místo s $\mathcal{R}[a,b]$ se pracuje s $\mathcal{R}[a,b]/\sim$ pro vhodnou relaci ekvivalence $\sim$.)

Příklad 4. Na souvislém grafu $G = (M,E)$ s množinou vrcholů M máme metriku

$$d(u,v) = \text{počet hran na nejkratší cestě v } G \text{ spojující } u \text{ a } v.$$

Příklad 5. Je-li A konečná množina (abeceda), máme na množině $M = A^m$ slov délky m nad abecedou A tak zvanou *Hammingovu metriku* ($u = a_1a_2\ldots a_m, v = b_1b_2\ldots b_m$)

$$d(u,v) = \text{počet souřadnic } i, \text{ pro něž } a_i \neq b_i.$$

Měří míru odlišnosti obou slov—jaký nejmenší počet změn v písmenech stačí k přeměně u ve v.

Příklad 6. Na dvourozměrné sféře

$$M = S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

můžeme zavést metriku

$$d(x,y) = \text{délka nejkratší křivky ležící v } S_2 \text{ a spojující } x \text{ a } y.$$

Konkrétně je $d(x,y)$ rovna délce kratšího z obou oblouků, na něž body x a y dělí hlavní kružnici $K(x,y)$ jimi procházející. $K(x,y)$ je průnik S_2 s rovinou určenou počátkem souřadnic a body x a y. Leží-li tyto tři body na přímce (x a y jsou antipodální), není $K(x,y)$ určena jednoznačně, ale to nic nemění na tom, že pak $d(x,y) = \pi$. Tuto metriku nazveme *sférickou metrikou.* Můžeme ji uvažovat i na podmnožinách S_2, například na horní polosféře

$$S_2^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0\}.$$

Dá se dokázat (úloha 9), že S_2^+ se sférickou metrikou není izometrická žádné množině $X \subset \mathbf{R}^n$ s euklidovskou metrikou. Totéž tedy platí i pro celou sféru. Sféra ani polosféra tak nejsou „ploché“, nedají se „splácnout“ do roviny ani žádného jiného euklidovského prostotu se zachováním vzdáleností.

Příklad 7. Položme $M = \mathbf{Z}$ (množina celých čísel) a vezměme nějaké prvočíslo p, například $p = 29$. Pro $z \in \mathbf{Z}$ jako $m_p(z)$ označíme největší celé číslo $e \geq 0$ takové, že p^e dělí z; $m_p(0) := \infty$. Na M definujeme tzv. *p-adickou metriku* $(2^{-\infty} = 0)$

$$d_p(x,y) = 2^{-m_p(x-y)}.$$

Dá se ukázat, že p-adická metrika splňuje toto zesílení trojúhelníkové nerovnosti:

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(z,y)).$$

Metrikám splňujícím tuto silnější verzi trojúhelníkové nerovnosti se říká *ultrametriky* (nebo *nearchimedovské metriky*). Pro zajímavé vlastnosti ultrametrik viz úlohu 12.

Koule, otevřené a uzavřené množiny. (M,d) buď metrický prostor. Pro bod $a \in M$ a reálné číslo $r > 0$ nazveme množinu

$$B(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) < r\}, \text{ resp. } \overline{B}(a,r) = \{x \in M \mid d(a,x) \leq r\},$$

(otevřenou) koulí se středem a a poloměrem r, resp. *uzavřenou koulí se středem a a poloměrem r*. Podmnožina $X \subset M$ je *otevřená*, pokud

$$\forall a \in X\ \exists r > 0 : B(a,r) \subset X,$$

jinak řečeno, X s každým bodem obsahuje i nějakou kouli kolem něj. $X \subset M$ je *uzavřená*, pokud je $M \backslash X$ otevřená množina. Každá koule je otevřená množina a každá uzavřená koule je uzavřená množina.

Tvrzení 1.1. *V metrickém prostoru (M,d) jsou množiny $\emptyset$ a M otevřené i uzavřené. Sjednocení libovolně mnoha otevřených množin je otevřená množina a průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina. Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina a průnik libovolně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.*

Důkaz. Množiny $\emptyset$ a M jsou zjevně otevřené a protože jedna je doplňkem druhé, jsou i uzavřené. Nechť $\{G_i \mid i \in I\}$ je systém otevřených množin a $a \in G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Pak a leží v nějaké G_j a tedy, pro nějaké $r > 0$, $B(a,r) \subset G_j \subset G$ a G je otevřená. Nechť je indexová množina I konečná a $a \in G = \bigcap_{i \in I} G_i$. To znamená, že $a \in G_i$ pro každé $i \in I$, a tak $B(a, r_i) \subset G_i$ pro nějaká čísla $r_i > 0$. Protože jich je jen konečně mnoho, můžeme vzít $r > 0$, že $r < \min(r_i :\ i \in I)$, a máme $B(a,r) \subset B(a,r_i) \subset G_i$ pro všechna $i \in I$. Tedy $B(a,r) \subset G$ a G je otevřená. Tvrzení o uzavřených množinách vyplývá z tvrzení o otevřených množinách pomocí de Morganových identit přechodem k doplňkům. $\square$

Otevřené množiny jsou „robustní“ množiny—leží-li bod a v otevřené množině X, pak pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ žádná porucha či posunutí menší než ε nedostane a ven z X. Uzavřené množiny si zase můžeme představovat jako množiny s ostrými obrysy—zanedlouho dokážeme, že X je uzavřená, právě když s každou konvergentní posloupností bodů obsahuje i její limitu.

Okolí bodu, vnitřní, vnější a další body. (M,d) buď metrický prostor a $a \in M$ jeho bod. Každou otevřenou množinu $U \subset M$ splňující $a \in U$ nazveme *okolím* bodu a. Například každá koule $B(a,r)$ je okolím a a ovšem každé okolí bodu a obsahuje nějakou takovou kouli.

Nechť $a \in M$ je bod a $X \subset M$ je množina. V následujících definicích symbolem U rozumíme okolí bodu a. Řekneme, že

- a je *vnitřním bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset X$;
- a je *vnějším bodem* X, když existuje U tak, že $U \subset M \backslash X$;
- a je *hraničním bodem* X, když každé U protíná X i $M \backslash X$;
- a je *limitním bodem* X, když je pro každé U průnik $U \cap X$ nekonečný;
- a je *izolovaným bodem* X, když existuje U tak, že $U \cap X = \{a\}$.

Vnitřní a izolované body X nutně leží v X a vnější body leží mimo X. Hraniční a limitní body X mohou ležet v X i mimo X.

Jako příklad vezmeme v euklidovské rovině $\mathbf{R}^2$ množinu

$$X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\} \cup \{(0,2)\},$$

jednotkový kruh se středem v počátku, z něhož jsme počátek odstranili a k němuž jsme přidali bod $(0,2)$. Pak vnitřní body X tvoří množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \|x\| < 1\}$, vnější body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| > 1, x \neq (0,2)\}$, hraniční body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\} \cup \{(0,0),(0,2)\}$, limitní body množinu $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ a izolované body množinu $\{(0,2)\}$.

Podprostory a součiny metrických prostorů. Popíšeme dvě jednoduché konstrukce vyrábějící nové metrické prostory ze starých. Metrický prostor (M_1,d_1) je *podprostorem* metrického prostoru (M_2,d_2), pokud $M_1 \subset M_2$ a pro každé dva body x,y z M_1 máme $d_1(x,y) = d_2(x,y)$. Metrický prostor (M,d) a podmnožina $X \subset M$ dávají nový metrický prostor (X,d'), kde d' je metrika d zúžená na $X \times X$; je jasné, že (X,d') je podprostorem (M,d). Říká se také, že (X,d') je podprostor s *indukovanou metrikou.*

(M,d) je *součinem* metrických prostorů (M_1,d_1) a (M_2,d_2), když $M = M_1 \times M_2$ a d je metrika ($x = (x_1,x_2)$ a $y = (y_1,y_2)$ jsou z M):

$$d(x,y) = \sqrt{d_1(x_1,y_1)^2 + d_2(x_2,y_2)^2}.$$

Všimněte si, že součin euklidovských prostorů $\mathbf{R}^m$ a $\mathbf{R}^n$ je euklidovský prostor $\mathbf{R}^{m+n}$ (přesně řečeno, $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ je izometrický $\mathbf{R}^{m+n}$ prostřednictvím zobrazení $((x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_n)) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$).

Vzorec pro součinovou metriku jsme zafixovali poněkud libovolně, hlavním důvodem bylo, aby pro euklidovské prostory platilo $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$. Ale například vzorce

$$d(x,y) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2) \text{ nebo } d(x,y) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\}$$

by posloužily dobře také. Není totiž těžké vidět, že všechny tři definují stejné otevřené (a tedy i uzavřené) množiny v $M_1 \times M_2$, a proto se výsledné součinové prostory velmi podobají. Pro úvahy a pojmy, které vystačí jen s otevřenými množinami (což zahrnuje většinu úvah v této přednášce, s vyjímkou izometrie a cauchyovskosti posloupnosti), jsou tyto tři součinové metriky nerozlišitelné.

Úlohy

1. Ukažte, že nezápornost metriky plyne z axiomů b) a c).

2. Co se stane, když v definici metriky zapomeneme na symetrii? Plyne z ostatních axiomů?

3. Dokažte vzorec pro maximovou metriku: $\lim_{p\to+\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$.

4. Odvoďte z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti $((a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2))$ trojúhelníkovou nerovnost pro euklidovskou metriku.

5. Ověřte trojúhelníkovou nerovnost pro supremovou metriku.

6. Dokažte vzorec pro maximovou metriku pro funkce: je-li f spojitá na $[a,b]$, pak
$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

7. Ověřte v příkladu 3 pro $M = \mathcal{C}[a,b]$ axiom b) metrického prostoru.

8. Ověřte trojúhelníkové nerovnosti v diskrétních příkladech 4 a 5.

9. Dokažte, že horní polosféra S_2^+ se sférickou metrikou není izometrická žádné podmnožině euklidovského prostoru s euklidovskou metrikou. Návod: uvažte čtyři body $(0,0,1)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

10. Jak by se totéž dokázalo pro sférický vrchlík $S_2^v = \{(x_1,x_2,x_3) \in S_2 \mid x_3 \geq v\}$, kde $0 \leq v < 1$?

11. Ověřte, že metrika v příkladu 7 je ultrametrika.

12. Dokažte tyto neintuitivní vlastnosti ultrametrického prostoru: každý trojúhelník je rovnoramenný a v každé kouli je libovolný bod jejím středem.
13. Ukažte, že v metrickém prostoru jsou koule $B(a, r)$ otevřené množiny a uzavřené koule $\overline{B}(a, r)$ a jednobodovky $\{a\}$ jsou uzavřené množiny.
14. Je konečná podmnožina metrického prostoru vždy uzavřená?
15. Co lze říci o otevřených množinách metrického prostoru (M, d), jehož každý bod je izolovaný (jako bod množiny M)?
16. Ukažte, že bod množiny X v metrickém prostoru je limitním bodem X, právě když není izolovaným bodem X. A ukažte, že bod mimo množinu X je limitním bodem X, právě když je hraničním bodem X.