1. přednáška z MA II, 22. 2. 2007

Co nás čeká v LS:

1. Riemannův integrál
2. Řady funkcí (stejnoměrná konvergence, mocninné řady, Fourierovy řady)
3. Metrické prostory

---

1 Riemannův integrál

Bernhard Riemann (1826-1866)

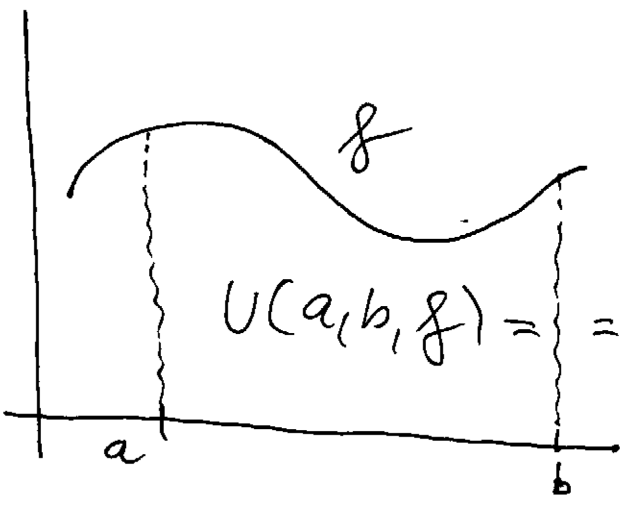
K čemu to je? Výpočet plochy

- už v antice Archimedes spočítal plochu parabolické úseče
- ale až cca 1670 Newton a Leibniz nezávisle objevili souvislost mezi plochou a derivací

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$f \geq 0$ a spojitá

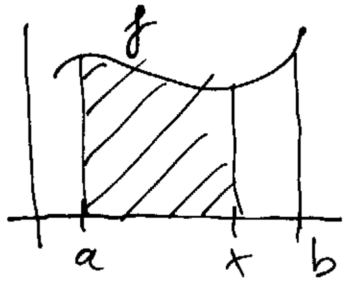
(pro jednoduchost)



$$U(a,b,f) = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Plochu útvaru $U(a,b,f)$ (ať je to cokoli) označíme jako $\int_a^b f(x)\,dx$ $\left(=\int_a^b f(t)\,dt = \dots\right)$

- Riemannův integrál fce f na $[a,b]$
- f je integrand; x, t atd. je integrační proměnná



$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \quad (= \text{plocha } U(a,x,f))$$

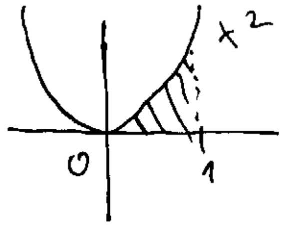
$$F : [a,b] \to \mathbb{R}$$

<u>1. Základní věta analýzy</u>: $F'(x) = f(x)$ na (a,b), tj. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

<u>2. Základní věta analýzy</u>: Je-li $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ primitivní z f (tj. $g' = f$ na $(a,b]$), potom
$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

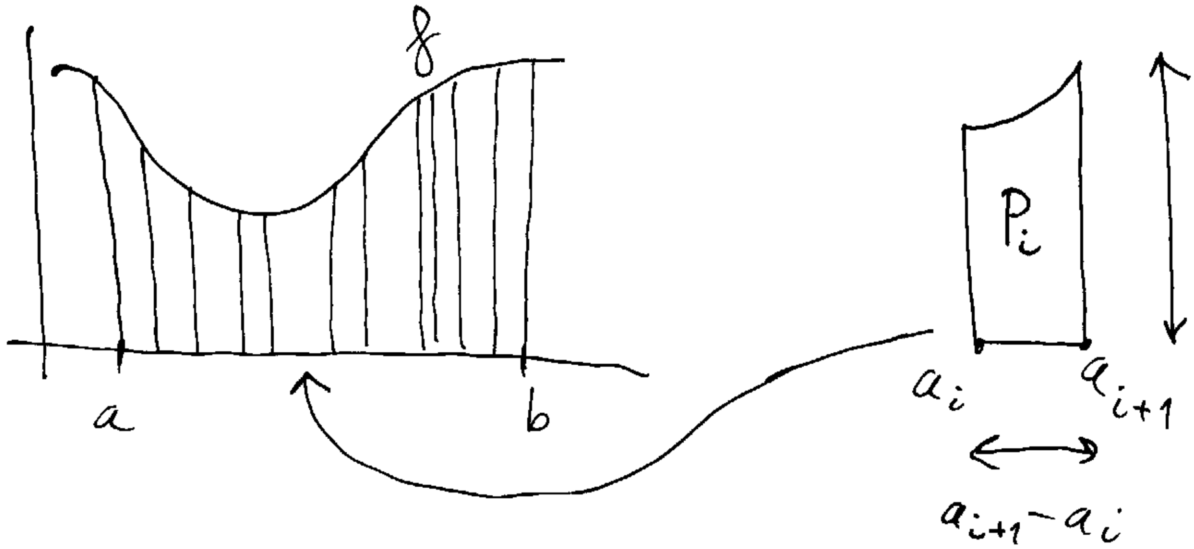
<u>Aplikace:</u> • Vyrábění prim. funkcí. Např. každá spojitá fce má primitivní funkci.

• Výpočet plochy, známe-li prim. fci g.

Např. plocha útvaru  $= \int_0^1 x^2\,dx =$

$= \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$, protože $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$.

Ale co je to tedy ta plocha? Riemann:



$? \doteq f(c_i)$

$a_i \le c_i \le a_{i+1}$

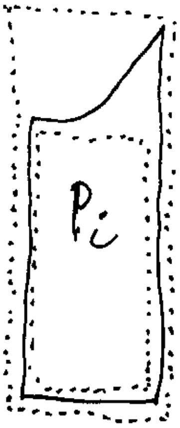
$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1}-a_i)\, f(c_i), \text{ kde}$$

$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$, $c_i \in [a_i, a_{i+1}] = I_i$

$$\lambda := \max_{0 \le i \le k-1} (a_{i+1}-a_i)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1}-a_i)\, f(c_i)}$$

Druhý přístup, který vymyslel Darboux:



$$m_i = \inf_{I_i} f, \quad M_i = \sup_{I_i} f$$

$$(a_{i+1} - a_i) m_i \leq \text{plocha}(P_i) \leq (a_{i+1} - a_i) M_i$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) m_i \leq \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} \leq \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) M_i$$

$$= \text{pl.}(P_0) + \text{pl.}(P_1) + \cdots + \text{pl.}(P_{k-1}).$$

Pro $\lambda \to 0$ obě sumy splynou a dostaneme ten $\int_a^b f(x)\,dx \ldots$.

Teď přesně $-\infty < a < b < +\infty$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ buď libovolná funkce (nemusí být spojitá či omezená).

$D = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ je dělení intervalu $[a,b]$, když

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b.$$

$I_i := [a_i, a_{i+1}]$, $|I_i| := a_{i+1} - a_i$, $\sum_{i=0}^{k-1} |I_i| = b - a$

$\lambda = \lambda(D) = \max_{0 \leq i \leq k-1} |I_i|$ — norma dělení D

Když $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ je dělení $[a,b]$ a $C = (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$, kde $c_i \in I_i$ (tj. $a_i \leq c_i \leq a_{i+1}$), je dvojice (C, D) dělení intervalu $[a,b]$ s body.

Pak též definujeme $R(f, D, C) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \cdot f(c_i)$

$|I_i| = a_{i+1} - a_i$

– Riemannova suma (riemannovská)

---

1. Definice Riemannova integrálu $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Číslo $I \in \mathbb{R}$ je R. integrál fce f na $[a,b]$, když $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall$ dělení $[a,b]$ s body (D, C) platí, že

$$\lambda(D) < \delta \Rightarrow |I - R(f, D, C)| < \varepsilon.$$

Pozn. $I \in \mathbb{R}$, žádné $\pm\infty$. I existuje, pak píšeme $I = \int_a^b f(x)\,dx$ a řekneme, že f je r-ský integrovatelná na $[a,b]$.

$\mathcal{R}[a,b] = \{ f : f \text{ je r. integr. na } [a,b] \}$.

Shrnutí: $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda(D)\to 0} R(f,D,C) \in \mathbb{R}}$$

$D=(a_0,a_1,\dots,a_k)$ dělení $[a,b]$, $I_i=[a_i,a_{i+1}]$.

$m_i := \inf_{I_i} f = \inf(\{f(x) : x\in I_i\})$

$M_i := \sup_{I_i} f$. Pak

$$s(f,D) := \sum_{i=0}^{k-1} |I_i|\cdot m_i \quad (\text{resp. } S(f,D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i|\cdot M_i)$$

je dolní, resp. horní, R-ská (vlastně Darbouxova) suma. Vždy definovaná: $s(f,D)\in\mathbb{R}$ nebo $-\infty$, $S(f,D)\in\mathbb{R}$ nebo $+\infty$.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup(\{s(f,D) : D \text{ je dělení } [a,b]\})$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf(\{S(f,D) : \text{—''—}\}) \text{ je}$$

dolní, resp. horní, R-ův integrál fce f na $[a,b]$.

Vždy definovaný: $\underline{\int_a^b} \in\mathbb{R}$ nebo $\pm\infty$, totéž $\overline{\int_a^b}$.

2. Definice Riemannova integrálu

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ má na $[a,b]$ R-ův integrál, pokud

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ (ne $\pm\infty$). Tuto společnou hodnotu, když existuje, značíme $\int_a^b f(x)\,dx$ a nazýváme R-ovým integrálem f na $[a,b]$.

Za chvíli dokážeme, že vždy $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

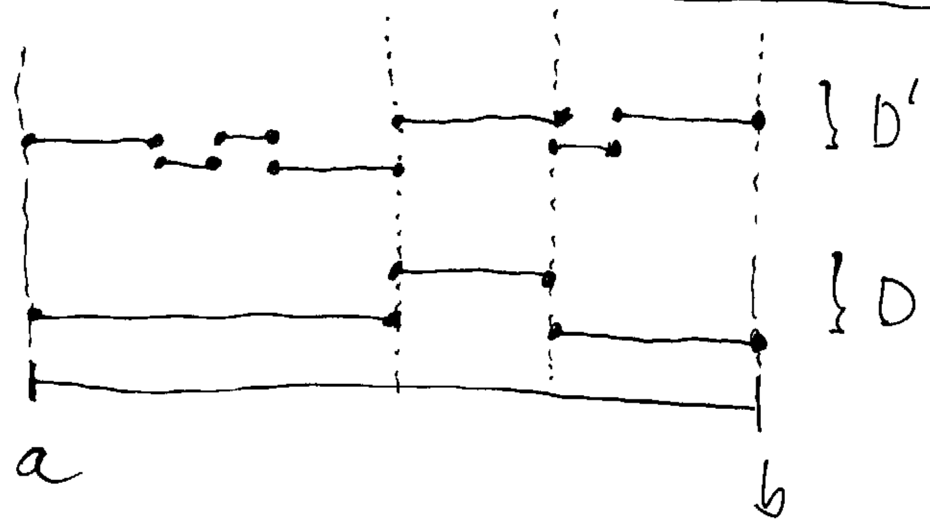
Dokážeme také, že obě definice jsou ekvivalentní (dávají stejné v-sky integrovatelné funkce) a dávají stejnou hodnotu R-ova integrálu.

Tvrzení 1.1 (omezenost a v-ská integrovatelnost)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ není omezená $\Rightarrow f\notin \mathcal{R}[a,b]$, tj. f není na $[a,b]$ R-ovsky integrovatelná.

Důkaz. Cvičení 1 pro posluchače. $\boxtimes$

D, D' jsou dělení $[a,b]$ a $D \subset D'$ – řekneme, že <u>D' je zjemnění D</u> (<u>D' zjemňuje D</u>).



$\boxed{\text{Tvrzení 1.2}}$ (nerovnosti pro $s(f,D)$ a $S(f,D)$)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$.

a) D, D' dělení $[a,b]$, D' zjemňuje D, potom $s(f,D) \le s(f,D')$ a $S(f,D) \ge S(f,D')$.

b) D, D' dělení $[a,b] \Rightarrow s(f,D) \le S(f,D')$.

c) —— || ————, potom platí

$$m(b-a) \le s(f,D) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D') \le M(b-a).$$

O tu nám jde!

<u>Důkaz.</u> Příště. ⊠