Přednáška 13, 8. ledna 2020

Dva Cauchyovy vzorce. Důkazy vět 1–3. Reziduová věta. Řada $\sum n^{-2k}$

Důkaz. 1. Linearita $\int$ plyne hned z linearity $\int_{\partial R}$. 2. Vezměme nějaké obdélníky R_n obsahující bod a ve svých vnitřcích a smršťující se k němu. ML odhady integrálů $\int_{\partial R_n} f$ ukazují, vzhledem k $\mathrm{obv}(R_n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a omezenosti $|f|$ na prstencovém okolí bodu a, že tyto integrály jdou k 0 a $\int f = 0$. 3. Když je S čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$ a $a + S$ je jeho posun, pak podle definice $\int_{\partial R}$ máme $\int_{\partial(a+S)} \frac{1}{z-a} = \int_{\partial S} \frac{1}{z} = \rho$. 4. ML odhady integrálů $\int_{\partial R}(f - f_n) = \int_{\partial R} f - \int_{\partial R} f_n$ ukazují, že pro $n \to \infty$ jdou k 0: $\mathrm{obv}(R)$ je konstantní, ale nyní $\max_{z \in \partial R} |f(z) - f_n(z)| \to 0$ pro $n \to \infty$. $\Box$

Budeme potřebovat dodatek k tvrzení o konstantě ρ.

Tvrzení (další záporné mocniny). *Nechť R je obdélník, $a \in \mathrm{int}(R)$ je bod a $k \geq 2$ je celé číslo. Pak*

$$\int_{\partial R} \frac{1}{(z-a)^k} = 0\ .$$

Důkaz. Nebudeme dělat, ale můžete o něm přemýšlet v úloze 1 . $\Box$

Cauchyovy vzorce jsou další důležitý výsledek v komplexní analýze. Vyjadřují hodnotu holomorfní funkce a jejích derivací v daném bodě pomocí hodnot ve vzdálených bodech, v čemž se projevuje zvláštní a fascinující nelokálnost komplexní analýzy. Pro jednoduchost tyto vzorce uvedeme a dokážeme jen pro celé funkce (a jen první derivaci).

Věta (dva Cauchyovy vzorce). *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá funkce. Pak, je-li $\rho = 2\pi i$ hořejší konstanta, pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$f(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{z-a} \ \text{ a } \ f'(a) = \frac{1}{\rho} \int \frac{f(z)}{(z-a)^2}\ .$$

Důkaz. Existence $f'(a)$ implikuje omezenost funkce $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ na prstencovém okolí bodu a. Podle vlastností 1–3 funkcionálu $\int$ pak máme

$$0 = \int \frac{f(z) - f(a)}{z-a} = \int \frac{f(z)}{z-a} - f(a) \int \frac{1}{z-a} = \int \frac{f(z)}{z-a} - f(a)\rho\ .$$

Protože $\rho \neq 0$ podle tvrzení v minulé přednášce, dostáváme první Cauchyův vzorec.

Abychom dokázali druhý, daný bod $a \in \mathbb{C}$ umístíme do vnitřku obdélníka R.[1] Pro každé $b \in \mathrm{int}(R) \setminus \{a\}$ podle prvního Cauchyova vzorce a díky linearitě $\int_{\partial R}$ máme

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(b)}{a-b} &= \frac{1}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{(z-a)^2} + \\ &\quad + \frac{b-a}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)}\ .\end{aligned}$$

ML odhad posledního integrálu ukazuje, že pro každé b dosti blízké a je v $|\cdot|$ omezený konstantou nezávisející na b. Když $b \to a$, $b \neq a$, jde levá strana k $f'(a)$ a poslední výraz k 0, což dává druhý Cauchyův vzorec. □

Důkazy vět 1–3. Nejprve dokážeme Liouvilleovu větu 2. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá a omezená funkce, $|f(z)| < c$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ a reálnou konstantu $c > 0$. Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ jsou dva (různé) body. Podle úlohy 2 pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme čtverec S se stranou $s \geq n$, že $a, b \in \mathrm{int}(S)$ a pro každé $z \in \partial S$ je $|z-a|, |z-b| > \frac{s}{3} = \frac{\mathrm{obv}(S)}{12}$. Podle prvního C. vzorce a linearity $\int_{\partial R}$ je

$$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{\rho}\int_{\partial S}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\ .$$

ML odhad tohoto integrálu dává, že v absolutní hodnotě je nanejvýš

$$\frac{c}{\mathrm{obv}(S)^2/144}\cdot \mathrm{obv}(S) \leq \frac{36c}{n}\ .$$

To pro $n \to \infty$ jde k 0, tedy $f(a) = f(b)$ a f je konstantní funkce.

Pro důkaz spojitosti f' pro celou funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ve větě 3 použijeme druhý Cauchyův vzorec. Pro pevné $a \in \mathbb{C}$ a libovolné $b \in \mathbb{C}$ tento vzorec a linearita $\int_{\partial R}$ dávají, že

$$\begin{aligned}f'(a) - f'(b) &= \frac{1}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{(z-a)^2} - \frac{1}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{(z-b)^2} \\ &= \frac{a-b}{\rho}\int_{\partial R}\frac{f(z)(2-a-b)}{(z-a)^2(z-b)^2}\ ,\end{aligned}$$

[1] Odteď minimalizuji používání funkcionálu $\int$, jehož zavedení asi nebylo úplně nutné.

kde R je libovolný obdélník obsahující uvnitř a a b. ML odhad ukazuje, že pro každé b dosti blízké a je poslední integrál v absolutní hodnotě omezený konstantou nezávislou na b. Tedy $b \to a$ dává $f'(b) \to f'(a)$ a derivace f' je spojitá v a.

Konečně dokážeme větu 1, že každá celá funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má rozvoj do mocninné řady se středem v 0. Číslo $a \in \mathbb{C}$ buď libovolné a R buď tak velký obdélník, že $0, a \in \mathrm{int}(R)$ a pro každé $z \in \partial R$ je $|a/z| = |a|/|z| < \frac{1}{2}$ a $|z-a| > 1$ (úloha 3). Nechť $m \in \mathbb{N}$. Pomocí prvního Cauchyova vzorce a identity $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m + \frac{x^{m+1}}{1-x}$ dostáváme, že

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z}\left(\sum_{n=0}^{m}(a/z)^n + \frac{(a/z)^{m+1}}{1-a/z}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right)a^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\frac{f(z)(a/z)^{m+1}}{z-a} \\ &=: \sum_{n=0}^{m} c_n a^n + \frac{I_{m+1}}{2\pi i}\,. \end{aligned}$$

ML odhad ukazuje, že jsme hotovi: pro $m \to \infty$

$$|I_{m+1}| \le \max_{z \in \partial R}|f(z)| \cdot \frac{(1/2)^{m+1}}{1} \cdot \mathrm{obv}(R) \to 0\,.$$

Pro každé $a \in \mathbb{C}$ tedy

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n, \quad \text{kde} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S}\frac{f(z)}{z^{n+1}}$$

pro libovolný obdélník S obsahující uvnitř 0.

Meromorfní funkce, rezidua. Podstatně zobecníme tvrzení o konstantě ρ v minulé přednášce. Množina $A \subset \mathbb{C}$ je *diskrétní*, pokud v každé kouli $B(z,r) \subset \mathbb{C}$ leží jen konečně mnoho jejích prvků. Holomorfní funkci

$$f\colon U \setminus A \to \mathbb{C}\,,$$

kde $A \subset U$ je diskrétní množina, nazveme *funkcí meromorfní* a A nazveme *množinou jejích pólů*, když každý bod $a \in A$ má okolí $U_a \subset U$ s $U_a \cap A = \{a\}$, že pro nějakou holomorfní funkci $g_a\colon U_a \to \mathbb{C}$ a nějaká čísla $k_a \in \mathbb{N}_0$ a $c_{j,a} \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, k_a$, pro každé $z \in U_a \setminus \{a\}$ je

$$f(z) = g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a} \frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}\ .$$

Pro $k_a = 0$ se suma definuje jako 0 ($f = g_a$ pak je holomorfní na U_a). Koeficient $c_{1,a}$ je takzvané *reziduum funkce f v bodě a*, označované jako $\mathrm{res}(f,a) := c_{1,a}$. Z prvního Cauchyova vzorce plyne, že $\mathrm{res}(f,a)$ je jednoznačně určené funkcí f (úloha 4).

Věta (reziduová). *$f\colon U \setminus A \to \mathbb{C}$ buď meromorfní funkce s množinou pólů A a $R \subset U$ buď obdélník splňující $\partial R \cap A = \emptyset$. Suma níže pak je konečná a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f = \sum_{a\in A\cap \mathrm{int}(R)} \mathrm{res}(f,\, a) = \sum_{a\in A\cap R} \mathrm{res}(f,\, a)\ .$$

Integrál funkce f přes hranici obdélníka R, dělený $2\pi i$, se tedy rovná součtu jejích reziduí v pólech uvnitř R.[2]

Důkaz. Nekonečně mnoho prvků A v $\mathrm{int}(R)$ by znamenalo limitní bod množiny A v R, ve sporu s diskrétností A (úloha 5). Pro každý bod $a \in R \cap A$ vezmeme takový čtverec $S_a \subset \mathrm{int}(R) \cap U_a$ se středem v a, že tyto čtverce jsou disjunktní. Obdélník R pak rozdělíme na obdélníky zahrnující všechny čtverce $\{S_a \mid a \in R \cap A\}$. Pak

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} f &= \sum_{a\in A\cap R}\int_{\partial S_a} f = \sum_{a\in A\cap R}\int_{\partial S_a}\left(g_a(z) + \sum_{j=1}^{k_a}\frac{c_{j,a}}{(z-a)^j}\right)\\ &= \sum_{a\in A\cap R} 2\pi i\cdot \mathrm{res}(f,\, a)\end{aligned}$$

a jsme hotovi. První rovnost plyne pomocí části 3 věty o vlastnostech $\int_u$ již dvakrát použitým argumentem (úloha 6). Druhá rovnost používá definici meromorfní funkce. Třetí rovnost plyne z linearity integrálu, C.-G. věty, tvrzení o konstantě ρ a prvního tvrzení této přednášky. $\square$

[2]Nyní je srozumitelná jedna pokročilejší matematická anekdota, kterou ale nutno formulovat anglicky. Do you know that the contour integral of that function around the boundary of France is zero? ??? All Poles are in the eastern Europe!

Zobecnění Basilejského problému. Jako aplikaci reziduové věty a komplexní analýzy vůbec nalezneme součet řady

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}},\ \ k \in \mathbb{N}\ .$$

V přednášce 10 jsme Fourierovou řadou spočítali, že $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Věta ($\sum n^{-2k}$ =?). *Pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje kladný zlomek $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, že*

$$\zeta(2k) = \sum n^{-2k} = 1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots = \alpha_k \pi^{2k}\ .$$

Důkaz. Existují zlomky $B_0, B_1, \ldots$, tak zvaná *Bernoulliova čísla*, že

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r x^r}{r!}$$

(úloha 7). Vememe meromorfní funkci $H\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ danou vzorcem

$$H(z) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1}\ ,$$

která má póly $\mathbb{Z}$ a reziduum $\mathrm{res}(H, n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ (úloha 8). Když je $f(z)$ holomorfní na okolí bodu $n \in \mathbb{Z}$, pak zřejmě $\mathrm{res}(fH, n) = f(n)$ (úloha 12). Položíme $f(z) = 1/z^{2k}$ a pro $N \in \mathbb{N}$ jako S_N označíme čtverec s vrcholy $(N + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Podle reziduové věty

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_N} \frac{H(z)}{z^{2k}} = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{res}(H(z) z^{-2k},\ n) = \mathrm{res}(H(z) z^{-2k},\ 0) + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}}\ .$$

Podle úlohy 9 existuje konstanta $c > 0$, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ je $z \in \partial S_N \Rightarrow |H(z)| < c$. ML odhad integrálu vlevo dává, že v $|\cdot|$ je nanejvýš

$$\max_{z \in \partial S_N} \left| \frac{H(z)}{z^{2k}} \right| \cdot \mathrm{obv}(S_N) < \frac{c}{N^{2k}} \cdot (8N + 4)\ ,$$

což pro $N \to \infty$ jde k 0. Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{1}{2}\, \mathrm{res}(H(z) z^{-2k},\ 0)\ .$$

Podle definice Bernoulliových čísel máme

$$z^{-2k}H(z) = \frac{2\pi i \cdot z^{-2k}}{e^{2\pi i z} - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r (2\pi i)^r z^{r-1-2k}}{r!} \ .$$

Takže

$$\operatorname{res}(H(z)z^{-2k}, 0) = \frac{(-1)^k B_{2k} (2\pi)^{2k}}{(2k)!}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}$$

je racionální násobek čísla π^{2k}. □

Je pravda, že $B_{2k-1} = 0$ pro $k \geq 2$ (úloha 10). Dále $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$ a tak dál (úloha 11). Předchozí důkaz jsme převzali z knihy P. D. Laxe a L. Zalcmana *Complex Proofs of Real Theorems* vydané AMS (The American Mathematical Society) se sídlem v Providence na RI (Rhodes Island) v roce 2012. O komplexní analýze se lze dále poučit ve skriptech J. Veselého *Komplexní analýza pro učitele*, Karolinum, Praha, 2000.

Úlohy

1. Dokažte, že pro každé celé číslo $k \geq 2$ a komplexní číslo a je
$$\int (z-a)^{-k} = 0 \ .$$

2. Sestrojte pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a, b \in \mathbb{C}$ čtverec $S \subset \mathbb{C}$ s $s \geq n$, kde s je délka jeho strany, že $a, b \in \operatorname{int}(S)$ a pro každé $z \in \partial S$ jsou vzdálenosti $|z-a|, |z-b|$ větší než $\frac{s}{3}$.

3. Ukažte, že pro každé $a \in \mathbb{C}$ existuje takový obdélník R, že $0, a \in \operatorname{int}(R)$ a pro každé $z \in \partial R$ je $|a/z| < \frac{1}{2}$ a $|z-a| > 1$.

4. Proč je hodnota rezidua f v a jednoznačně určená funkcí f?

5. Dokažte, že každá nekonečná podmnožina obdélníku R má v R limitní bod.

6. Ukažte, jak rozdělit daný obdélník R s předepsanými disjunktními obdélníky $R_1, R_2, \dots, R_k \subset \mathrm{int}(R)$ vhodnými přímkami na podobdélníky zahrnující všechny R_j tak, že platí první rovnost v důkazu reziduové věty.
7. Dokažte, že Bernoulliova čísla jsou zlomky.
8. Dokažte, že funkce $\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$ má póly přesně v množině celých čísel a má všechna rezidua 1.
9. Ukažte, že tato funkce je stejnoměrně (vzhledem k N) omezená na hranicích čtverců S_N.
10. Dokažte, že Bernoulliova čísla s lichými indexy > 1 jsou nulová.
11. Je pravda, že Bernoulliova čísla splňují $\lim B_n = 0$?
12. Proč pro funkci f holomorfní na okolí $n \in \mathbb{Z}$ je $\mathrm{res}(fH, n) = f(n)$?