Přednáška 12, 18. prosince 2019

Konstanta $\rho = 2\pi i$. Cauchyova–Goursatova věta. Funkcionál $\int$

Několik integrálů. Pokračujeme v důkazu vět 1, 2 a 3 z minulé přednášky. Pro $k \in \mathbb{N}$ a úsečku u jejím k-*ekvidělením* rozumíme dělení u na k podúseček stejné délky $\frac{1}{k}|u|$, které je dané obrazy dělení $0 < \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < \cdots < \frac{k-1}{k} < 1$ jednotkového intervalu.

Tvrzení ($\int_{u,\partial R}$ z lin. funkce). *Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f(z) = \alpha z + \beta$ a R je obdélník.*

1. *Platí, že*

$$\int_{ab} f = \int_{ab} (\alpha z + \beta) = g(b) - g(a), \quad \textit{kde} \;\; g(z) = \alpha \frac{z^2}{2} + \beta z \; .$$

2. *Též*

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial R} (\alpha z + \beta) = 0 \; .$$

Důkaz. 1. Toto není těžké spočítat jako $\lim C(f, p_n)$, kde p_n jsou n-ekvidělení úsečky ab, a ponecháváme to jako úlohu 1.

2. Kanonické vrcholy R označme a, b, c, d. Podle definice $\int_{\partial R}$ a výsledku v části 1 máme

$$\int_{\partial R} f = g(b) - g(a) + g(c) - g(b) + g(d) - g(c) + g(a) - g(d) = 0 \; .$$

□

Důkaz následujícího převodu $\int_u f$ na Riemannův integrál ponecháváme jako úlohu 2.

Tvrzení ($\int_u$ a $(R)\int_a^b$). *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ s $a \neq b$, $f\colon ab \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a $\varphi = t(b-a) + a\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ je parametrizace definující úsečku $u = ab$. Potom*

$$\begin{aligned} \int_u f &= (R)\int_0^1 \mathrm{re}\,(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \; dt + i \cdot (R)\int_0^1 \mathrm{im}\,(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \; dt \\ &= (b-a)\left((R)\int_0^1 \mathrm{re}\,(f(\varphi(t))) \; dt + i \cdot (R)\int_0^1 \mathrm{im}\,(f(\varphi(t))) \; dt \right) \; . \end{aligned}$$

Pro úplnost zmíníme standardní definici křivkového integrálu $\int_\varphi f$, na němž je komplexní analýza založena. Když

$$f\colon U \to \mathbb{C} \ \text{ a } \ \varphi\colon [a,\, b] \to U$$

je po částech hladká a spojitá funkce, pak

$$\int_\varphi f := (R)\int_a^b \mathrm{re}\,(f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t))\ dt + i\cdot(R)\int_a^b \mathrm{im}\,(f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t))\ dt\ ,$$

pokud tyto Riemannovy integrály existují.

Následující výsledek je nedoceněný pilíř komplexní analýzy: kdyby v něm konstanta ρ vyšla 0, žádné Cauchyovy vzorce, které uvedeme příště, by neexistovaly a komplexní analýza by se zhroutila.

Tvrzení (konstanta $\rho = 2\pi i$). *Nechť S je čtverec s vrcholy $\pm 1 \pm i$. Pak*

$$\rho := \int_{\partial S} \frac{1}{z} \ne 0, \quad \textit{dokonce}\ \ \mathrm{im}(\rho) \ge 4\ .$$

Důkaz. Kanonické vrcholy S jsou $a = -1-i$, $b = 1-i$, $c = 1+i$ a $d = -1+i$. Nechť $p_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je n-ekvidělení úsečky ab. Protože násobení číslem i geometricky znamená otočení kolem počátku kladným směrem (proti směru hodinových ručiček) o úhel $\frac{\pi}{2}$, je $q_n := ip_n = (ia_0, ia_1, \ldots, ia_n)$ n-ekvidělení úsečky bc. Podobně jsou $r_n := iq_n = -p_n$ a $s_n := ir_n = -ip_n$ po řadě n-ekvidělení úseček cd a da. Překvapivě pro $f(z) = \frac{1}{z}$ je

$$C(f,\, p_n) = C(f,\, q_n) = C(f,\, r_n) = C(f,\, s_n)\ .$$

Skutečně, rozšíření zlomku číslem i dává

$$C(f,\, p_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(b-a)/n}{a + j(b-a)/n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{(ib-ia)/n}{ia + j(ib-ia)/n} = C(f,\, q_n)\ ,$$

neboť $ib = c$ a $ia = b$. Podobně odvodíme zbylé dvě rovnosti. Dále vzhledem k $b - a = 2$ a $a = -1 - i$ rozšířením zlomku číslem $\frac{2j}{n} - 1 + i$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\,(C(f,\, p_n)) &= \mathrm{im}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2/n}{-1-i+2j/n}\right) = \mathrm{im}\left(\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2j/n - 1 + i}{(2j/n-1)^2+1}\right)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j/n-1)^2+1} \ge \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} = 1\ .\end{aligned}$$

Tedy

$$\operatorname{im}(\rho) = \operatorname{im}\left(\int_{\partial S} \frac{1}{z}\right) = 4 \cdot \operatorname{im}\left(\int_{ab} \frac{1}{z}\right) = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \operatorname{im}\left(C(1/z,\, p_n)\right) \geq 4$$

(úloha 3) a skutečně $\rho \neq 0$. $\square$

V úloze 5 lze spočítat, že $\rho = 2\pi i$. Tato konstanta se v komplexní analýze často vyskytuje.

Cauchyova–Goursatova věta je výsledek komplexní analýzy číslo 1: integrál $\int_\varphi f$ holomorfní funkce f přes jednoduchou uzavřenou křivku φ (tedy φ je prostá, až na $\varphi(a) = \varphi(b)$), která leží v definičním oboru funkce f spolu se svým vnitřkem, je 0. My ale umíme integrovat jen přes hranice obdélníků a se složitými křivkami se nemusíme trápit.

Pro důkaz věty budeme potřebovat pojem *diametru (průměru)* $\operatorname{diam}(X)$ množiny $X \subset \mathbb{C}$ a vzpomenout si na pomocný výsledek z důkazu Baireovy věty. Definujeme

$$\operatorname{diam}(X) := \sup(\{|x - y| \mid x,\, y \in X\})\ .$$

Průměr množiny může být $+\infty$. Důkaz následujícího tvrzení ponecháváme jako úlohu 6, viz též úlohy 7 a 8.

Tvrzení (vnořené uzavřené množiny). *Když*

$$\mathbb{C} \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$

jsou neprázdné a uzavřené množiny s $\lim \operatorname{diam}(A_n) = 0$*, pak* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$*.*

Ještě budeme potřebovat konstrukci *čtvrtek* obdélníka R s kanonickými vrcholy a, b, c, d. Když $e = \frac{a+b}{2}$, $f = \frac{b+c}{2}$, $g = \frac{c+d}{2}$ a $h = \frac{d+a}{2}$ jsou středy stran R a $j = \frac{a+c}{2}$ je střed R, jeho čtyři čtvrtky jsou obdélníky A, B, C a D s kanonickými vrcholy po řadě

$$(a,\, e,\, j,\, h),\ (e,\, b,\, f,\, j),\ (j,\, f,\, c,\, g)\ \text{ a }\ (h,\, j,\, g,\, d)\ ,$$

na něž se R rozpadne rozříznutím podle úseček eg a hf. Pro každou z těchto čtvrtek E patrně platí: $\operatorname{obv}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{obv}(R)$ a $\operatorname{diam}(E) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(R)$.

Věta (Cauchyova–Goursatova). *Nechť $f\colon U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a $R \subset U$ je obdélník. Pak*

$$\int_{\partial R} f = 0\ .$$

Důkaz. Nechť f, U a R jsou jak je uvedeno. Sestrojíme takové vnořené obdélníky

$$R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots\ ,$$

že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je R_{n+1} čtvrtka obdélníka R_n a

$$\left|\int_{\partial R_{n+1}} f\right| \geq \frac{1}{4}\left|\int_{\partial R_n} f\right|\ .$$

Nechť už jsou takové $R_0, R_1, \dots, R_n$ definované a A, B, C a D jsou čtvrtky obdélníka R_n. Tvrdíme, že

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial A} f + \int_{\partial B} f + \int_{\partial C} f + \int_{\partial D} f\ .$$

Tato identita plyne použitím části 3 věty o vlastnostech integrálu. Po rozepsání každého $\int_{\partial A} f, \dots, \int_{\partial D} f$ jako součtu čtyř integrálů přes strany dostáváme vpravo 16 členů. Osm z nich odpovídajících stranám čtvrtek uvnitř R_n se vzájemně zruší, protože tvoří 4 dvojice opačných orientací stejné úsečky. Zbylých osm členů odpovídajících stranám čtvrtek ležících na ∂R_n se sečte na integrál vlevo. Z identity podle trojúhelníkové nerovnosti plyne, že existuje čtvrtka $E \in \{A, B, C, D\}$ s $|\int_{\partial E} f| \geq \frac{1}{4}|\int_{\partial R_n} f|$. Položíme $R_{n+1} = E$.

Podle posledního tvrzení existuje bod z_0, že

$$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n\ .$$

Protože $R_0 = R \subset U$, je i $z_0 \in U$. Nyní použijeme existenci derivace $f'(z_0)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $B(z_0, \delta) \subset U$ a pro nějakou funkci $\Delta\colon B(z_0, \delta) \to \mathbb{C}$ pro každé $z \in B(z_0, \delta)$ je $|\Delta(z)| < \varepsilon$ (úloha 9) a

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{g(z)} + \underbrace{\Delta(z)(z - z_0)}_{h(z)}\ .$$

Uvážíme označené funkce $g(z)$ a $h(z)$. Je jasné, že $g(z)$ je lineární a $h(z) = f(z) - g(z)$ spojitá. Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$ tak velké, že $R_n \subset B(z_0, \delta)$. Podle druhé části prvního tvrzení (a linearity integrálu) máme

$$\int_{\partial R_n} f = \int_{\partial R_n} g + \int_{\partial R_n} h = \int_{\partial R_n} h \ .$$

Díky ML odhadu (část 2 věty o vlastnostech integrálu) je

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R_n} h \right| &\le \max_{z \in \partial R_n} |\Delta(z)(z - z_0)| \cdot \mathrm{obv}(R_n) \\ &< \varepsilon \cdot \mathrm{diam}(R_n) \cdot \mathrm{obv}(R_n) = \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{diam}(R)}{2^n} \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)}{2^n} \\ &< \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)^2}{4^n} \ . \end{aligned}$$

Zde jsme použili výše zmíněné zmenšení průměru a obvodu na polovinu po čtvrcení a to, že průměr obdélníka je menší než jeho obvod. Podle předchozích odhadů a výsledků tak

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \le \left| \int_{\partial R_n} f \right| = \left| \int_{\partial R_n} h \right| < \varepsilon \cdot \frac{\mathrm{obv}(R)^2}{4^n}$$

a $|\int_{\partial R} f| < \varepsilon \cdot \mathrm{obv}(R)^2$. Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, $\int_{\partial R} f = 0$. $\square$

Pozoruhodný důkaz, že? Autorem věty je francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)*, který během své politické emigrace pobýval roku 1833 i v Praze. Cauchy však ve svých argumentech vždy předpokládal spojitost derivace f' a teprve až další francouzský matematik *Édouard Goursat (1858–1936)* větu v r. 1900 dokázal jen za předpokladu pouhé existence f':

> E. Goursat, Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **1** (1900), 14–16.

Funkcionál $\int$. Pro kompaktní množiny $A \subset \mathbb{C}$ — připomeňte si, že každá taková množina A je uzavřená a omezená — definujeme množiny holomorfních funkcí

$$H_A := \{f \colon \mathbb{C} \setminus A \to \mathbb{C} \mid f \text{ je holomorfní}\} \ \text{ a } \ H := \bigcup_{A \subset \mathbb{C} \text{ je kompaktní}} H_A \ .$$

Množina H tedy obsahuje všechny funkce holomorfní na doplňcích kompaktů.

Definice (funkcionál $\int$). *Funkcionál $\int$, tedy funkci na množině H, definujeme předpisem*

$$\int : H \to \mathbb{C},\ \int f = \int_{\partial R} f\ ,$$

kde $f \in H_A$ a R je libovolný obdélník s $\mathrm{int}(R) \supset A$.

Než si uvedeme a v příští poslední přednášce dokážeme různé vlastnosti funkcionálu $\int$, zdůvodníme, že jeho hodnota nezávisí na volbě obdélníku R a definice tak je korektní.

Pro funkci $f \in H_A$ a každé dva obdélníky R a S s $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$ dokážeme, že

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial S} f\ .$$

Nechť nejprve i $S \subset \mathrm{int}(R)$. Prodloužením stran obdélníku S obdélník R rozložíme na devět obdélníků $R_1, \dots, R_8, S$. Stejný geometrický argument jako v důkazu poslední věty dává první následující rovnost:

$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{8} \int_{\partial R_i} f + \int_{\partial S} f = \int_{\partial S} f\ .$$

Druhá, že vždy $\int_{\partial R_i} f = 0$, vyplývá z Cauchyovy–Goursatovy věty, protože $R_i \subset \mathbb{C} \backslash A$. Obecnou polohu R a S převedeme na tento vyřešený případ. Podle úlohy 10 pro každé dva obdélníky R a S a každou kompaktní neprázdnou množinu A s $A \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)$ existuje obdélník T, že

$$A \subset \mathrm{int}(T)\ \text{ a }\ T \subset \mathrm{int}(R) \cap \mathrm{int}(S)\ .$$

Zde se využije geometrická vlastnost, že průnik jakýchkoli dvou obdélníků s protínajícími se vnitřky je zase obdélník. To třeba pro kruhy či trojúhelníky neplatí. Takže

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial T} f = \int_{\partial S} f\ .$$

Věta (vlastnosti funkcionálu $\int$). *Důležité vlastnosti jsou čtyři.*

1. *Linearita: pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $f, g \in H$ je*

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g \ .$$

Kde ale je lineární kombinace $\alpha f + \beta g$ definovaná? — úloha 11.

2. *Rozšíření C.–G. věty: když pro $a \in \mathbb{C}$ je funkce $f \in H_{\{a\}}$ omezená na nějakém prstencovém okolí bodu a, tak*

$$\int f = 0 \ .$$

3. *Zase ρ: pro každé $a \in \mathbb{C}$ je*

$$\int \frac{1}{z-a} = \rho \ ,$$

kde ρ $(= 2\pi i)$ je konstanta z hořejšího tvrzení.

4. *Výměna limity a $\int$: když $f, f_n \in H_A$, $n = 1, 2, \ldots$, $A \subset \mathrm{int}(R)$ pro nějaký obdélník R a $f_n \rightrightarrows f$ na ∂R, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f \ .$$

Úlohy

1. Dokažte, že $\int_{ab}(\alpha z + \beta) = \alpha(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) + \beta(b-a)$.
2. Dokažte tvrzení o vztahu $\int_u$ a $(R)\int_a^b$.
3. Buď dána konvergentní posloupnost komplexních čísel (z_n). Dokažte, že $\mathrm{im}(\lim z_n) = \lim \mathrm{im}(z_n)$.
4. Dokažte, že $\mathrm{re}(\rho) = 0$.
5. Pro $a = -1 - i$ a $b = 1 - i$ spočítejte, že

$$\int_{ab} \frac{1}{z} = \frac{\pi i}{2} \ . \ \text{ Tedy } \ \rho = 4(\pi i/2) = 2\pi i \ .$$

6. Dokažte tvrzení o vnořených uzavřených množinách v $\mathbb{C}$.
7. Dokažte, že toto tvrzení platí, i když se předpoklad o diametrech nahradí pouhou omezeností A_1.
8. Na druhou stranu ale ukažte, že tato verze se slabším předpokladem v obecném úplném metrickém prostoru neplatí.
9. Jakou má hodnotu funkce $\Delta(z)$ v důkazu C.–G. věty v z_0?
10. Dokažte lemma o obdélníku T v důkazu korektnosti definice $\int$.
11. Když $f, g \in H$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, kde je funkce $\alpha f + \beta g$ definovaná?
12. $\int 1/z^2 =?$