12. přednáška 17. prosince 2007

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Jedna diferenciální rovnice n-tého řádu se takto převede na ekvivalentní soustavu diferenciálních rovnic prvého řádu: funkce $y = y(x)$ je na intervalu I řešením rovnice

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

právě když n-tice funkcí $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ je na intervalu I řešením soustavy rovnic prvního řádu

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2,\ \ldots, y_{n-2}' = y_{n-1},\ F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_{n-1}') = 0.$$

Za snížení řádu rovnice jsme ovšem zaplatili zavedením dalších $n-1$ funkcí.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b,$$

kde a_i a b jsou zadané funkce, je tedy ekvivalentní speciální soustavě lineárních rovnic prvního řádu

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2,\ \ldots, y_{n-2}' = y_{n-1},\ y_{n-1}' = -a_{n-1}y_{n-1} - \cdots - a_1 y_1 - a_0 y + b.$$

Budeme se proto zabývat teorií obecných soustav lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$y_i' = a_{i,1}y_1 + a_{i,2}y_2 + \cdots + a_{i,n}y_n + b_i,\ 1 \le i \le n,$$

kde $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$ a $b_i = b_i(x)$, $1 \le i, j \le n$, je $n^2 + n$ zadaných funkcí, definovaných na nějakém otevřeném intervalu I, a $y_i = y_i(x)$, $1 \le i \le n$, jsou neznámé funkce. V maticovém zápisu,

$$y' = Ay + b,$$

kde $A:\ I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b:\ I \to \mathbf{R}^n$ je daná maticová a daná vektorová funkce a $y:\ I \to \mathbf{R}^n$ je neznámá vektorová funkce. V dalším budeme vždy předpokládat, že funkce $a_{i,j}$ a b_i jsou na intervalu I spojité.

Věta 3.3. *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $\alpha \in I$ a $\beta \in \mathbf{R}^n$ jsou počáteční podmínky a $a_{i,j},\ b_i:\ I \to \mathbf{R}$, $1 \le i, j \le n$, jsou spojité funkce. Soustava lineárních diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami*

$$\begin{array}{rcl} y(\alpha) & = & \beta \\ y'(x) & = & A(x)\cdot y(x) + b(x) \end{array}$$

má na intervalu I jediné řešení—existuje jediná n-tice funkcí $y_1, \ldots, y_n$ z $C^1(I)$, která pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a $x \in I$ splňuje rovnosti

$$y_i(\alpha) = \beta_i \quad a \quad y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)y_j(x) + b_i(x).$$

Důkaz věty 3.3, který je opět založený na větě o kontrahujícím zobrazení, nebudeme na přednášce dělat. Na rozdíl od vět 3.1 a 3.2 dostáváme globální existenci a jednoznačnost řešení na celém intervalu I. Z věty 3.3 plyne, že pokud se dvě řešení z a u soustavy $y' = Ay + b$ shodují v jednom bodě $x_0 \in I$ (tj. $z(x_0)$ a $u(x_0)$ je tatáž n-tice z $\mathbf{R}^n$), potom se shodují na celém I, $z(x) = u(x)$ pro $\forall x \in I$.

Uvažme množinu řešení homogenní soustavy $y' = Ay$ a množinu řešení nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$:

$$H = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay \text{ na } I\} \quad \text{a} \quad N = \{y \in C^1(I)^n \mid y' = Ay + b \text{ na } I\}.$$

Obě jsou obsažené v množině n-tic funkcí $C^1(I)^n$, což je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ nekonečné dimenze.

Tvrzení 3.4. *H je vektorový podprostor $C^1(I)^n$ s dimenzí n. N je afinní podprostor $C^1(I)^n$ s dimenzí n. Pro každé řešení $y \in N$ platí, že $N = y + H = \{y + z \mid z \in H\}$.*

Důkaz. Díky linearitě derivování a maticového násobení je zřejmé, že H je vektorový podprostor: Pokud $y, z \in H$ a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, pak $(\alpha y + \beta z)' = \alpha y' + \beta z' = \alpha Ay + \beta Az = A(\alpha y + \beta z)$ a $\alpha y + \beta z \in H$. Stejně se dokážou i implikace $y, z \in N \Rightarrow y - z \in H$ a $y \in N, z \in H \Rightarrow y + z \in N$, které dávají, že $N = y + H$. Existence alespoň jednoho řešení $y \in N$ plyne z věty 3.3.

Dokážeme, že $\dim H = n$. Odtud plyne, že $\dim N = n$. Nechť $x_0 \in I$ je libovolné číslo, $\{e^i \in \mathbf{R}^n \mid 1 \le i \le n\}$ je kanonická báze $\mathbf{R}^n$ (i-tá složka e^i je 1 a ostatní jsou 0) a $\{y^i \in H \mid 1 \le i \le n\}$ jsou řešení homogenní soustavy splňující počáteční podmínky $y^i(x_0) = e^i$, $1 \le i \le n$—tato řešení existují podle věty 3.3. Je jasné (podle hodnot v x_0), že $\{y^1, \ldots, y^n\}$ je lineárně nezávislá množina v $C^1(I)^n$. Je-li $y \in H$ libovolné řešení, které má v x_0 hodnoty

$$y(x_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,$$

potom funkce $z(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i(x)$ patří do H a $z(x_0) = y(x_0)$. Podle věty 3.3 máme $z(x) = y(x)$ pro každé $x \in I$ a tedy $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y^i$. Takže $H = Lin(\{y^1, \ldots, y^n\})$ a $\dim H = n$. $\square$

Každá báze prostoru H se nazývá *fundamentální systém řešení (FSŘ)* homogenní soustavy $y' = Ay$.

Wronskián. *Wronského determinant* neboli *wronskián* n-tice vektorových funkcí

$f^1, \ldots, f^n : I \to \mathbf{R}^n$ je determinant matice $n \times n$ s $f^1, \ldots, f^n$ ve sloupcích:

$$W(x) = W_{f^1,\ldots,f^n}(x) = \det \begin{pmatrix} f_1^1(x) & f_1^2(x) & \ldots & f_1^n(x) \\ f_2^1(x) & f_2^2(x) & \ldots & f_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n^1(x) & f_n^2(x) & \ldots & f_n^n(x) \end{pmatrix}.$$

Připomeňme si, že $f^1, \ldots, f^n$ jsou *lineárně závislé (LZ)*, existují-li konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$, ne všechny nulové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i$$

je identicky nulová funkce, to jest pro každé $x \in I$ máme $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \overline{0}$. Zřejmě

$$f^1, \ldots, f^n \text{ jsou LZ } \Longrightarrow W_{f^1,\ldots,f^n}(x) = 0 \text{ pro } \forall x \in I$$

(matice definující $W(x)$ má pro každé $x \in I$ lineárně závislé sloupce). Opačná implikace obecně neplatí (úloha 1). Platí však v případě, že $f^1, \ldots, f^n$ jsou řešení homogenní soustavy $y' = Ay$.

Tvrzení 3.5. *Nechť vektorové funkce $f^1, \ldots, f^n : I \to \mathbf{R}^n$ na I splňují $(f^i)' = Af^i$, pro danou maticovou funkci $A : I \to \mathbf{R}^{n \times n}$ se spojitými položkami, a W je jejich wronskián. Pak*

$$\exists x \in I : W(x) = 0 \implies f^1, \ldots, f^n \text{ jsou LZ.}$$

Máme tedy ekvivalenci

$$\exists x \in I : W(x) = 0 \iff \forall x \in I : W(x) = 0.$$

Důkaz. Pokud $W(x_0) = 0$ pro $x_0 \in I$, matice hodnot vektorových funkcí $f^i(x_0)$ má lineárně závislé sloupce: $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x_0) = \overline{0}$ pro nějaká $\alpha_i \in \mathbf{R}$, ne všechny nulové. Lineární kombinace

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f^i(x)$$

je pak na I řešením soustavy $f' = Af$ a splňuje počáteční podmínku $f(x_0) = \overline{0}$. Jiným řešením $y' = Ay$ splňujícím $y(x_0) = \overline{0}$ je ovšem identicky nulová vektorová funkce. Podle věty 3.3 se obě řešení na I rovnají a funkce f je tedy identicky nulová. Takže $\sum_{i=1}^n \alpha_i f^i(x) = \overline{0}$ pro každé $x \in I$ a $f^1, \ldots, f^n$ jsou LZ. V ekvivalenci je implikace $\Leftarrow$ triviální a $\Rightarrow$ plyne spojením právě dokázané implikace a implikace uvedené před tvrzením. $\square$

Wronskián n-tice řešení $f^1, \dots, f^n$ homogenní soustavy $y' = Ay$ je tedy na I buď vždy nenulový a $f^1, \dots, f^n$ tvoří FSŘ, nebo je na I vždy nulový a $f^1, \dots, f^n$ jsou LZ a netvoří FSŘ.

Variace konstant pro soustavy. Následující vzorec ukazuje, jak pomocí FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$ dostat jedno (tzv. *partikulární*) řešení nehomogenní soustavy $y' = Ay + b$.

Věta 3.6. *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$ jsou počáteční podmínky, $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbf{R}^n$ je maticová a vektorová funkce se spojitými položkami, $y^1, \dots, y^n : I \to \mathbf{R}^n$ je FSŘ homogenní soustavy $y' = Ay$ a*

$$Y = Y(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & y_1^2(x) & \dots & y_1^n(x) \\ y_2^1(x) & y_2^2(x) & \dots & y_2^n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n^1(x) & y_n^2(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

je matice hodnot vektorových funkcí y^i. Potom je vektorová funkce $z : I \to \mathbf{R}^n$ definovaná formulí

$$z(x) = Y(x)\left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} \cdot b(t)\, dt + Y(x_0)^{-1} \cdot y^0\right)$$

(vektorovou funkci v integrandu integrujeme po složkách) řešením nehomogenní soustavy $z' = Az + b$ a splňuje počáteční podmínku $z(x_0) = y^0$.

Důkaz. Řešení soustavy $z' = Az + b$ budeme hledat ve tvaru kombinace

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i y^i = Yc,$$

kde $c_1(x), \dots, c_n(x)$ jsou neznámé funkce a c je jejich sloupcový vektor. Máme

$$\begin{aligned} z' &= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i y^i\right)' = \sum_{i=1}^{n} (c_i y^i)' \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i (y^i)' + \sum_{i=1}^{n} c_i' y^i = \sum_{i=1}^{n} c_i A y^i + \sum_{i=1}^{n} c_i' y^i \\ &= A\sum_{i=1}^{n} c_i y^i + \sum_{i=1}^{n} c_i' y^i \\ &= Az + \sum_{i=1}^{n} c_i' y^i. \end{aligned}$$

Takže bude platit $z' = Az + b$, pokud

$$Yc' = \sum_{i=1}^{n} c_i' y^i = b.$$

Funkce $y^1, \dots, y^n$ tvoří FSŘ soustavy $y' = Ay$, jejich wronskián $W = \det Y$ je podle Tvrzení 3.5 v každém bodě x intervalu I nenulový a matice $Y(x)$ je invertibilní. Tudíž

$$c' = Y^{-1} b \quad \text{a} \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} \cdot b(t)\, dt + d,$$

kde d je sloupcový vektor integračních konstant. Celkem

$$z(x) = Y(x) \left(\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} \cdot b(t)\, dt + d \right).$$

Zvolíme-li $d = Y(x_0)^{-1} y^0$, je splněna počáteční podmínka $z(x_0) = y^0$. □

Úlohy

1. Uveďte příklad lineárně nezávislé n-tice vektorových funkcí, jejichž wronskián je identicky nulový.