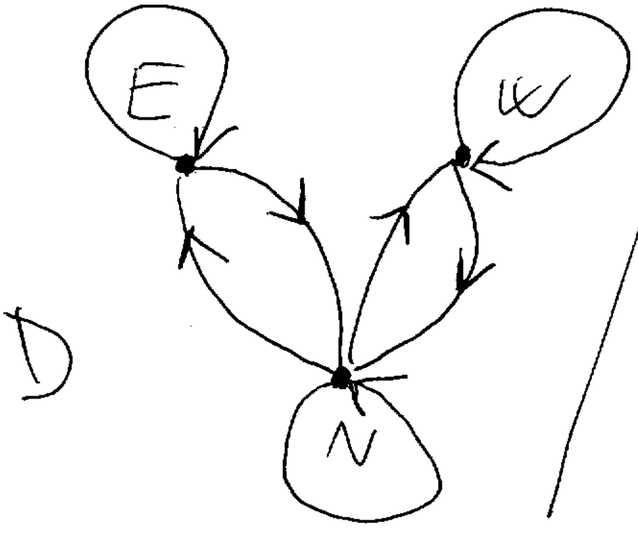
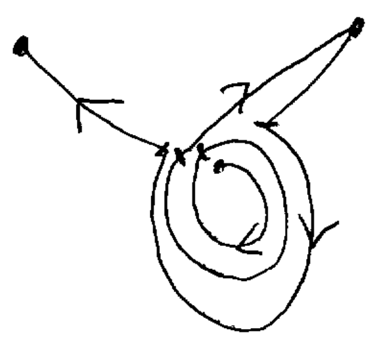
Přednáška 11, 14.5. 2007

Úloha, kterou jsme řešili, o počtu slov $u = a_1 a_2 \dots a_n \in \{N, E, W\}^*$ délky n, v níž písmena E a W nikdy nesousedí (… ~~EW~~ …, … ~~WE~~ …) se dá ~~vyjádřit~~ přeformulovat jako úloha o počtu ~~cest~~ tahů délky $n-1$ v orientovaném grafu D (délka tahu = # hran):



NNNWNNE je tah



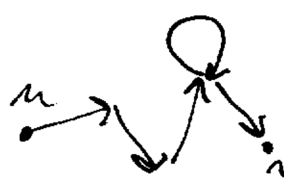
Obecná metoda pro řešení podobných úloh s konečnou historií (lokálních) je metoda <u>přechodové matice</u> (<u>transfer matrix method</u>)

<u>$D=(V,E,\varphi)$</u> buď <u>orientovaný graf</u>, který může mít násobné šipky i smyčky (takže $\varphi: E \to V\times V$, $\varphi(e)=(u,v)$ počáteční vrchol, koncový vrchol)

a $w: E\to R$ buď <u>váhová funkce</u>, kde R je komut. okruh s 1 (např. $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{Z}[x]$).

<u>tah Γ v D</u>, ~~začínající ve vrcholu končící ve~~ z vrcholu u do v, s délkou $n\geq 0$, je

- pro $n=0$ prázdná posloupnost hran a $u=v$
- pro $n\geq 1$ posloupnost hran $e_1, e_2, \ldots, e_n$ taková, že $\varphi(e_1)=(u,\cdot)$, $\varphi(e_n)=(\cdot,v)$,



konc. vrchol e_i = poč. vrchol e_{i+1}.

<u>Váha tahu Γ</u> je $w(\Gamma):=\prod_{i=1}^{n} w(e_i)$.

Nechť $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$ (vrcholová množina)

Pro $1\leq i,j\leq p$ a $n\geq 0$ nechť $A_{i,j}(n):=\sum_{\Gamma} w(\Gamma)$, kde sčítáme přes tahy Γ délky n z v_i do v_j.

~~Lemma 1~~ <u>Přechodová matice</u> "A" $A_D \in \mathbb{R}^{p \times p}$ je

$\underline{A_D := A(1)}$, tj. $(A_D)_{i,j} = \sum\limits_{\substack{e \in E \\ \varphi(e) = (v_i, v_j)}} w(e)$.

Všimněte si, že $A_{i,j}(0) = \delta_{i,j} \left(= \begin{cases} 1 \dots i = j \\ 0 \dots i \neq j \end{cases} \right)$.

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $A_{i,j}(n) = (A_D^n)_{i,j}$.

$\underline{\text{D}}$ $A_{i,j}(n) = \sum\limits_{\substack{|P| = n, \text{ z} \\ v_i \text{ do } v_j}} w(P) = \sum\limits_{\substack{e_1, \dots, e_n \text{ je} \\ \text{tah z } v_i \text{ do } v_j}} w(e_1) w(e_2) \cdots w(e_n)$

$= \sum (A_D)_{i_0, i_1} (A_D)_{i_1, i_2} \cdots (A_D)_{i_{n-1}, i_n}$

$v_i = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n} = v_j$

$= \sum\limits_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} (A_D)_{i, i_1} (A_D)_{i_1, i_2} \cdots (A_D)_{i_{n-1}, j} = (A_D^n)_{i,j}$. ⊠

Mocninu A_D^n mat. přechodu je tedy matice celkových vah tahů délky n v Γ, s předepsanými začátky a konci.

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ Okruhy $\underbrace{R^{p\times p}[[\lambda]]}_{S}$ a $\underbrace{R[[\lambda]]^{p\times p}}_{T}$ jsou izomorfní.

D. Nechť $F \in S$, tj. $F = \sum_{n\geq 0} M(n)\lambda^n$, kde $M(n)$ je $p\times p$ matice se složkami v R. F pošleme na matici $M \in T$ ($p\times p$) se složkami v $R[[\lambda]]$, $M = \left(\sum_{n\geq 0} M(n)_{i,j}\lambda^n\right)_{i,j=1}^{p}$.

Není těžké ověřit, že zobrazení $\Psi : S \to T$, $F \mapsto M$, je izomorfismus – rozmyslete si to jako cvičení. $\boxtimes$

Poznamenejme, že v S sčítáme a násobíme mocninné řady obvyklým způsobem, kdežto v T sčítáme (po složkách) a násobíme (maticově) matice.

Pro nás bude důležité, že izomorfismus okruhů posílá inverzní prvek (vzhledem k násobení) opět na inverzní prvek, tj.

$$\Psi(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{inverzní moc. řada, tj. } \frac{1}{F}}}{F^{-1}}) = (\underbrace{\Psi(F)}_{\text{inverzní matice}})^{-1}$$

$\boxed{\text{Věta}}$ (metoda přechodové matice)

Nechť or. graf $D=(V,E,\varphi)$, váhu $w: E \to R$ a $A_{i,j}(n)$ a přechodová matice $\underbrace{}_{A_D}$ jsou jako výše.

Potom

$$\boxed{F_{i,j}(\lambda) := \sum_{n \geq 0} A_{i,j}(n) \lambda^n = (-1)^{i+j} \frac{\det(I - \lambda A_D : j,i)}{\det(I - \lambda A_D)}},$$

kde $I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{p} \Big\} p$, tj. $I - \lambda A_D = (\delta_{i,j} - A_{i,j}(1)\lambda)_{i,j=1}^{p}$)

a „$: j,i$" znamená vypuštění j-tého řádku a i-tého sloupce.

D. Nechť $M(\lambda) := (F_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^{p} \in T$. Pak

$$\underset{\substack{\Uparrow \\ T}}{M(\lambda)} \underset{\substack{\uparrow \\ \psi}}{\cong} \underbrace{\sum_{n \geq 0} (A_{i,j}(n)) \lambda^n}_{\in S} \underset{\substack{\uparrow \\ L1}}{=} \sum_{n \geq 0} A_D^n \lambda^n = \underbrace{\frac{1}{\underbrace{I - A_D \lambda}_{\text{stále} \in S}}}_{\text{multipl. invert v } S}$$

formální geom. řada v okruhu mocninných řad S

$$\cong \big(\underbrace{\underbrace{I-\lambda A_D}_{\in T}}_{\text{multipl. inverz v } T}\big)^{-1}.$$ Takže $\Pi(\lambda)=(I-\lambda A_D)^{-1}$.

Ψ_1 L2, poznámka o inverzu

Zbytek plyne ze známé formule lineární algebry pro složky inverzní matice.

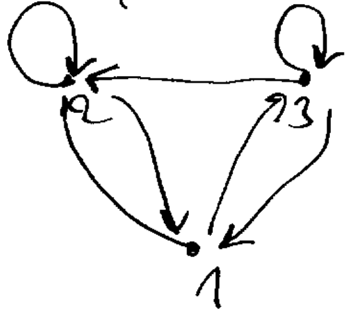
$\boxtimes$

Označme si $Q(\lambda) := \det(I-\lambda A_D)$. Pak, pro

$$c_D(n) := \sum_{\substack{\Gamma,\ \text{uz.} \\ \text{tah délky } n}} W(\Gamma),$$ máme formuli

$$\sum_{n\geq 1} c_D(n)\lambda^n = -\frac{\lambda Q'(\lambda)}{Q(\lambda)}$$ (důkaz - cvičení)

$\boxed{\text{Příklad}}$ $f(n) = \#$slov $u = a_1 a_2 \cdots a_n \in \{1,2,3\}^*$ délky n, že $a_i a_{i+1} \notin 11, 23$

$D =$ 

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(I-\lambda A_D) = \cdots = 1-2\lambda-\lambda^2+\lambda^3$$

$$\leadsto \sum_{n\geq 0} f(n)\lambda^n = \frac{1+\lambda}{1-2\lambda-\lambda^2+\lambda^3}$$

Věta S - konečná abeceda, $F \subset S^*$ - konečná množina zakázaných slov, $f(n) := \# u \in S^*$ délky n, neobsahujících žádné $v \in F$ jako podslovo. Potom

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \lambda^n \in \mathbb{R}(\lambda),$$ tj. je to racionální mocninná řada.

D. Přechodová matice. $\boxtimes$

Příklad # permutací $\underset{a_1 a_2 \ldots a_n}{\pi} \in S_n$, že $|a_i - i| \leq 1$.

- vyjdou Fib. čísla. Též lze přechodovou maticí, ale zbytečně komplikované.