Přednáška 10, 4. prosince 2019

Fourierovy řady

Ještě dva výsledky o mocninných řadách. Ještě před F. řadami si uvedeme bez důkazů dva výsledky o limitním chování funkce dané součtem mocninné rady.

Tvrzení (nezáporné koeficienty). *Nechť $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ je mocninná řada s nezápornými reálnými koeficienty, $c > 0$ je reálné číslo a daná mocninná řada konverguje pro každé $x \in [0, c)$. Pak následující limita a nekonečný součet vždy existují a rovnají se,*

$$\lim_{x\to c^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n \ ,$$

ať jsou konečné nebo $+\infty$.

Věta (Abelova). *$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ buď mocninná řada s reálnými koeficienty, $c > 0$ buď reálné číslo a nechť numerická řada $\sum_{n\geq 0} a_n c^n$ konverguje. Pak daná mocninná řada konverguje pro každé $x \in [0, c)$, následující limita existuje a platí rovnost*

$$\lim_{x\to c^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n \ .$$

Věta je pojmenována po norském matematikovi *Nielsi H. Abelovi (1802–1829).* Jako její aplikaci si uveďme identitu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \quad (\text{úloha } 1)\ .$$

Fourierovy řady. Zbytek přednášky 10 bude rychlokurz Fourierových řad, vše ale bez důkazů. Tyto řady funkcí nesou jméno francouzského matematika a fyzika *Josepha Fouriera (1768–1830). Trigonometrická řada* $F(x)$ je určena reálnými koeficienty $a_0, a_1, \ldots$ a $b_1, b_2, \ldots$ a je to řada funkcí

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))\ .$$

Vymykající se sčítanec $\frac{a_0}{2}$ se vysvětlí později v úloze 5. V kontrastu s mocninnými řadami můze být součtem trigonometrické řady, jak uvidíme, i nespojitá či nehladká funkce, což je předností těchto řad. Pro dvě funkce $f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ (tj. f a g mají na intervalu $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál) definujeme operaci

$$\langle f,\, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg\ .$$

Je to téměř skalární součin, má totiž vlastnosti *symetrie*

$$\langle f,\, g\rangle = \langle g,\, f\rangle\ ,$$

bilinearity

$$\langle \alpha f + \beta g,\, h\rangle = \alpha\langle f,\, g\rangle + \beta\langle g,\, h\rangle$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $h \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$) a *pozitivní semidefinitnosti*

$$\langle f,\, f\rangle \ge 0 \quad \text{(úloha 2)}\ .$$

Obecně ale $\langle \cdot, \cdot\rangle$ nemá vlastnost $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ (úloha 3), takže se nejedná o skutečný skalární součin.

Tvrzení (ortogonalita sinů a kosinů). *Pro každá dvě celá čísla $m, n \ge 0$ je*

$$\langle \sin(mx),\, \cos(nx)\rangle = 0\ .$$

Pro každá dvě celá čísla $m, n \ge 0$, kromě $m = n = 0$, je

$$\langle \sin(mx),\, \sin(nx)\rangle = \langle \cos(mx),\, \cos(nx)\rangle = \begin{cases} \pi & \dots \quad m = n \\ 0 & \dots \quad m \ne n\ . \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x),\, \sin(0x)\rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x),\, \cos(0x)\rangle = 2\pi\ .$$

Fourierova řada funkce. Jak víme (z *MA I*), funkci f definované na okolí 0, která má v 0 derivace $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ všech řádů $n = 0, 1, \dots$, se přiřazuje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\ ,$$

takzvaná Taylorova řada funkce f. Často, ale zdaleka ne vždy, je jejím součtem právě funkce $f(x)$. Podobně funkci $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ přiřadíme jistou trigonometrickou řadu, které se říká Fourierova řada funkce f a která se za příznivých okolností nasčítává na $f(x)$.

Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ nejprve definujeme její *cosinové Fourierovy koeficienty*

$$a_n = \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\, dx,\ n = 0, 1, \ldots ,$$

a *sinové Fourierovy koeficienty*

$$b_n = \frac{\langle f(x), \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

(úloha 4). Trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

s těmito koeficienty pak je ona *Fourierova řada funkce* f. Pomocí vlastností operace $\langle\cdot,\cdot\rangle$, předešlého tvrzení a výměnou sumace a integrace při stejnoměrné konvergenci se dokáže

Tvrzení (o F. koeficientech). *Nechť* $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ *a* $a_0, a_1, \ldots$ *a* $b_1, b_2, \ldots$ *jsou taková reálná čísla, že*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \rightrightarrows f(x) \quad (na\ [-\pi, \pi])\,.$$

Pak a_n *a* b_n *jsou Fourierovy koeficienty funkce* f.

Vyjadřuje-li trig. řada stejnoměrným součtem danou (integrovatelnou) funkci, jsou koeficienty řady nutně rovné F. koeficientům funkce. Tyto koeficienty navíc splňují následující nerovnost.

Věta (Besselova nerovnost). *Pro Fourierovy koeficienty* a_n *a* b_n *funkce* $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ *platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{\langle f, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,.$$

Nerovnost nese jméno německého matematika a astronoma *Friedricha W. Bessela (1784–1846).* Není těžké z ní odvodit (úloha 6)

Důsledek (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Pro každou funkci f z $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos(nx)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)\, dx = 0\ .$$

Po částech hladké funkce. Tyto funkce se, zhruba řečeno, právě rovnají součtu své F. řady. Funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je *po částech hladká*, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b,\ k \in \mathbb{N}\ ,$$

intervalu $[a, b]$, že na každém intervalu (a_{i-1}, a_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, má f spojitou derivaci f', pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x\to a_i^-} f(x) \ \text{ a } \ f'(a_i - 0) := \lim_{x\to a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \ldots, k-1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x\to a_i^+} f(x) \ \text{ a } \ f'(a_i + 0) := \lim_{x\to a_i^+} f'(x)\ .$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a, b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny. Je spousta příkladů po částech hladkých funkcí (úloha 7).

Uvedeme dvě věty o součtech F. řad funkcí. Spíše jen z estetických důvodů v nich budeme uvažovat místo funkcí typu $f\colon [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ 2π-*periodické funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, což jsou funkce splňující pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost $f(x + 2\pi) = f(x)$. Přechody mezi oběma třídami funkcí jsou jasné (úloha 8). Řekneme, že 2π-periodická funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je po částech hladká, je-li její zúžení $f \,|\, [-\pi, \pi]$ po částech hladké.

Věta (o $\rightrightarrows$ F. řady). *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická, spojitá a po částech hladká. Pak*

$$F_f(x) \rightrightarrows f(x) \ \ (na\ \mathbb{R})\ .$$

Věta (Dirichletova o F. řadě). *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a po částech hladká. Pak*

$$F_f(x) \to \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \ \ (na\ \mathbb{R})\ .$$

Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ bod nespojitosti funkce f, má F. řada funkce f součet $F_f(x_0)$ rovný aritmetickému průměru jednostranných limit f v x_0. Je-li funkce f v bodě x_0 spojitá, pak $F_f(x_0) = f(x_0)$. Věta je nazvána po německo-francouzkém matematikovi *Peterovi G. L. Dirichletovi (1805–1859).*

Basilejský problém. To byl problém sečíst řadu $\sum 1/n^2$. Vyřešil ho basilejský rodák *Leonhard Euler (1707–1783).* My tento součet získáme rozvojem funkce

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2\ ,$$

do Fourierovy řady. Protože $f(-\pi) = f(\pi)$, můžeme f uvažovat jako 2π-periodickou a všude definovanou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je to patrně sudá funkce; obecně je funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sudá*, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ se $g(-x) = g(x)$. Funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *lichá*, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ se $g(-x) = -g(x)$. Nechť $a > 0$ je reálné číslo a $g \in \mathcal{R}[-a, a]$. Pak platí identity

$$g \text{ je sudá} \Rightarrow \int_{-a}^{a} g = 2\int_0^a g \ \text{ a } g \text{ je lichá} \Rightarrow \int_{-a}^{a} g = 0 \ \ (\text{úloha 9})\ .$$

Ale zpět k F. rozvoji naší 2π-periodické paraboly $f(x) = x^2$. Vzhledem k poslední identitě a k úloze 10 vidíme, že všechny sinové F. koeficienty b_n funkce f jsou nulové. Stačí proto spočítat jen její cosinové F. koeficienty a_n. Podle jejich definice, předposlední identity a úlohy 10 je

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}\ .$$

Podobně pro $n \in \mathbb{N}$ dvojí integrací per partes máme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{(\sin(nx)/n)'}\,dx = \frac{2}{\pi n}\underbrace{\left[x^2\sin(nx)\right]_0^\pi}_{0-0=0} - \frac{4}{\pi n}\int_0^\pi x\ \overbrace{\sin(nx)}^{(-\cos(nx)/n)'}\ dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\left[x\cos(nx)\right]_0^\pi}_{\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nx)\,dx}_{0-0=0} = (-1)^n\frac{4}{n^2}\ . \end{aligned}$$

Protože $f(x)$ je spojitá a po částech hladká funkce, podle předpředešlé věty

$$F_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2} \rightrightarrows f(x) \quad (\text{na } \mathbb{R})\ .$$

Dosazením $x = \pi$ dostáváme

$$\pi^2 = f(\pi) = F_f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Úlohy

1. Dokažte pomocí Abelovy věty, že $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n = \log 2$.
2. Dokažte symetrii, bilinearitu a pozitivní semidefinitnost operace $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
3. Uveďte takovou nenulovou funkci $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, že $\langle f, f\rangle = 0$.
4. Proč jsou cosinové a sinové koeficienty funkce $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ definované?
5. Proč je tedy konstantní koeficient v trigonometrické řadě $\frac{a_0}{2}$ a ne a_0?
6. Odvoďte Riemannovo–Lebesgueovo lemma z Besselovy nerovnosti.
7. Je lomená čára po částech hladká funkce?
8. Nechť

   $$M_1 = \{f \mid f\colon [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}\} \ \text{ a } \ M_2 = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ je } 2\pi\text{-period.}\}\ .$$

   Popište přirozenou bijekci mezi množinami M_1 a M_2.

9. Dokažte uvedené identity pro integrál sudé, resp. liché, funkce přes souměrný interval.

10. Dokažte, že součin dvou sudých a dvou lichých funkcí je sudá funkce a že součin sudé a liché funkce je lichá funkce.

11. Spočítejte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \pi - x \colon [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ a vhodnou specializací odvoďte součet $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.