10. přednáška ZMA II, 26. 4. 2007

Jenom stručně (podrobný výklad je v uč. textu)

Tři příklady použití mocninných řad v kombinatorice a teorii čísel

1. **Tvrzení** $\underbrace{\#\text{ rozkladů } n \in \mathbb{N} \text{ na lichá čísla}}_{l(n)} =$

   $\underbrace{\#\text{ rozkladů } n \in \mathbb{N} \text{ na různá čísla}}_{r(n)}$.

   $$\boxed{\forall n : l(n) = r(n).}$$

Např. $l(7) = r(7) = 5$:

$7 = 5+1+1 = 3+3+1 = 3+\underbrace{1+\dots+1}_{4} = \underbrace{1+\dots+1}_{7}$.

$7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1$.

$\underline{D}$. $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} l(n)x^n}_{L(x)} = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots}$

$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$

$R(x) = \dfrac{\cancel{1-x^2}}{1-x} \cdot \dfrac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}} \cdot \dfrac{1-x^6}{1-x^3} \cdot \dfrac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}} \dots = L(x)$, takže

$r(n) = l(n) \ \forall n$. $\boxtimes$

(2) Odvození vzorce pro Fibonacciova čísla

$(F_n)_{n\geq 0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, $F_0 = F_1 = 1$,

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

$$F = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

pak $$(1-x-x^2)F = \sum F_n x^n - \sum F_n x^{n+1} - \sum F_n x^{n+2}$$

$$= F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n\geq 2} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n$$

$$= 1.$$

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{a}{1-\alpha x} + \frac{b}{1-\beta x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = a \sum (\alpha x)^n + b \sum (\beta x)^n = \sum (a\alpha^n + b\beta^n) x^n$$

$$\rightsquigarrow \boxed{F_n = a\alpha^n + b\beta^n}.$$

Spočte se, že $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $a = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{-\beta}{\sqrt{5}}$)

a tak $$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}.$$

③ **Rozklad $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ na disjunktní AP (aritmetické posloupnosti)** $a \in \mathbb{N}_0$, $d \in \mathbb{N}$

$$a + d\mathbb{N}_0 := \{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\} - \text{AP}.$$

$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $\mathbb{N}_0 = (a_1 + d_1\mathbb{N}_0) \dot\cup (a_2 + d_2\mathbb{N}_0) \dot\cup \dots \dot\cup (a_q + d_q\mathbb{N}_0)$ (*)

buď $\overbrace{\text{rozklad } \mathbb{N}_0 \text{ na disjunktní}}$ AP, kde $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_q$, $q \geq 2$

(např. $\mathbb{N}_0 = (0 + 2\mathbb{N}_0) \dot\cup (1 + 2\mathbb{N}_0)$

$= (0 + 2\mathbb{N}_0) \dot\cup (1 + 4\mathbb{N}_0) \dot\cup (3 + 4\mathbb{N}_0)$).

$\vdots$

Potom nemůže platit $d_1 < d_2 < \dots < d_q$, tj. největší diference se musí opakovat.

D. (*) $\Longleftrightarrow$ $\underset{1+z+z^2+\dots}{\frac{1}{1-z}} = \frac{z^{a_1}}{\underbrace{1-z^{d_1}}_{z^{a_1}+z^{a_1+d_1}+z^{a_1+2d_1}+\dots}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \dots + \frac{z^{a_q}}{1-z^{d_q}}$.
atd.

Nechť, pro spor, $d_1 < d_2 < \dots < d_q$, $q \geq 2$. Polož

$$z := e^{2\pi i/d_q} = \cos\left(\frac{2\pi}{d_q}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{d_q}\right)$$ a vidíš, že ta rovnost platit nemůže.

$\boxtimes$

Fourierovy řady

<u>Trigonometrická řada</u> : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

$f, g \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, definujeme

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f g$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0$$

Pozn. I pro $f \neq 0$ může být $\langle f, f \rangle = 0$.