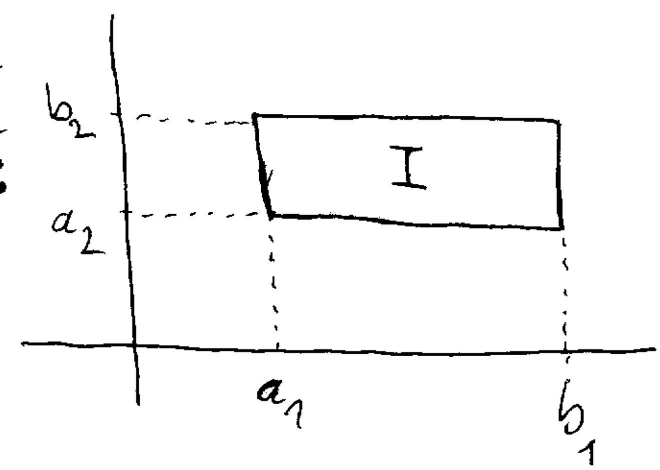
Vícerozměrný Riemannův integrál, Fubiniova věta

(n-rozměrný) **box** $I \subset \mathbb{R}^n$ je kart. součin

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$ kde

$-\infty < a_i < b_i < +\infty$. Např. v $\mathbb{R}^2$:



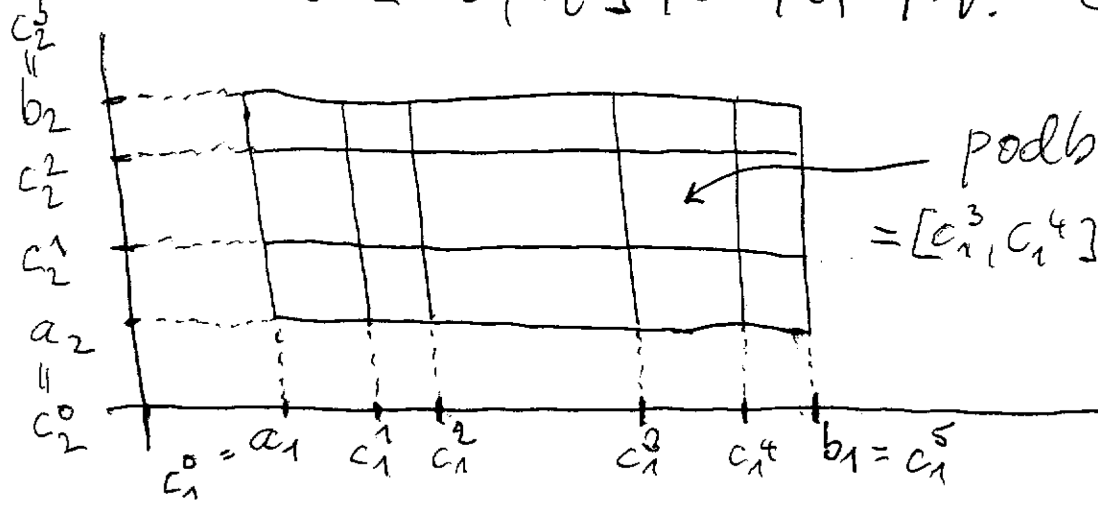
Objem boxu

je $|I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Dělení boxu na podboxy: D je dělení I, když

$$D = \{\underbrace{[c_1^{a_1}, c_1^{a_1+1}] \times [c_2^{a_2}, c_2^{a_2+1}] \times \cdots \times [c_n^{a_n}, c_n^{a_n+1}]}_{\text{podbox}} \mid 0 \le a_i < k_i,\ 1 \le i \le n\},$$ kde

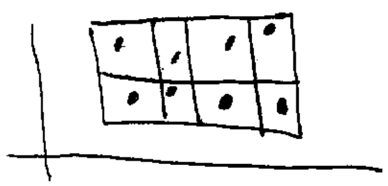
$a_i = c_i^0 < c_i^1 < \cdots < c_i^{k_i-1} < c_i^{k_i} = b_i$ jsou dělení intervalů $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Obrázkem:



podbox $J =$
$= [c_1^3, c_1^4] \times [c_2^1, c_2^2]$

norma dělení D je $\lambda(D) := \max\limits_{\substack{1 \le i \le n \\ 0 \le j < k_i}} (c_i^{j+1} - c_i^j)$

Dělení D boxu I s body ξ je dvojice (D, ξ), kde $\xi : D \to \mathbb{R}^n$, $\xi(J) \in J$ $\forall$ podbox J:



Riemannova definice vícerozměrného integrálu

$I \subset \mathbb{R}^n$ box, (D, ξ) jeho dělení s body, $f : I \to \mathbb{R}$ omezená funkce, R.-ova suma je

$$S(f, D, \xi) := \sum_{J \in D} |J| \cdot f(\xi(J)).$$

Integrál f přes I je limita

$$\int_I f := \lim_{\substack{(D,\xi) \\ \lambda(D) \to 0}} S(f, D, \xi), \text{ když existuje,}$$

$\left(\int_I f \in \mathbb{R}, \text{ ne } \pm\infty \right)$

to jest

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (D, \xi)$ dělení I s body, $\lambda(D) < \delta$:

$: \left| \int_I f - S(f, D, \xi) \right| < \varepsilon.$

Darbouxova definice, D dělení I, $f: I \to \mathbb{R}$ omezená, $m(J) := \inf_{x \in J} f(x)$, $M(J) = \sup_{x \in J} f(x)$

$$s(f,D) := \sum_{J \in D} |J| \cdot m(J) \text{ – dolní součet,}$$

$$S(f,D) := \sum_{J \in D} |J| \cdot M(J) \text{ – horní součet.}$$

$$\underline{\int_I} f = \sup\{s(f,D) \mid D \text{ dělení } I\} \text{ – dolní } \int,$$

$$\overline{\int_I} f = \inf\{S(f,D) \mid \text{ –"– }\} \text{ – horní } \int.$$

Opět platí: $-\infty < s(f,D) \leq \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f \leq S(f,D) < +\infty$, pro $\forall D$.

$\boxed{\int_I f := \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f}$, když se dolní a horní $\int$ rovnají.

Platí: f má $\int$ podle R.-ovy def. $\Longleftrightarrow$ f má $\int$ podle D.-ovy def. a obě hodnoty se rovnají.

$\boxed{\mathcal{R}(I) = \{f \mid f \text{ má R.-ův } \int \text{ přes } I\}}$ – množina funkcí R.-ovsky integrovatelných přes box I.

$E \subset \mathbb{R}^n$ má (Lebesgueovu) míru 0: $\forall \varepsilon > 0$ ex. taková posl. boxů $I_1, I_2, \ldots$ v $\mathbb{R}^n$, že $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$ a $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

$\boxed{\text{Věta (Lebesgue)}}$ $I \subset \mathbb{R}^n$ box, $f : I \to \mathbb{R}$, pak $f \in \mathcal{R}(I) \Longleftrightarrow f$ je na I omezená a mn. bodů nespojitosti f má míru 0.

Např. každá omezená f nespojitá jen v nejvýše spočetně mnoha bodech má R-ův $\int$ přes I.

$\boxed{\text{Důsledek}}$ $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I)$, $f \geq 0$ na I, $\int_I f = 0 \Rightarrow f = 0$ na I až na mn. bodů míry 0.

Fubiniova věta, přesněji věta Fubiniova typu, umožňuje převést výpočet vícerozměrného $\int$ na posloupnost obyčejných (jednorozměrných) $\int$-ů.

$X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $Z = X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ budte m-rozm., n-rozm. a $(m+n)$-rozm. boxy.

$\boxed{\text{Věta (Fubini)}}$ Nechť $f: \underset{X \times Y}{\underset{\parallel}{Z}} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(Z)$.

Všechny tři integrály

$$\int_Z f, \quad \int_X dx \int_Y f(x,y)\,dy \quad a \quad \int_Y dy \int_X f(x,y)\,dx$$

existují a rovnají se.

(Vysvětlení značení)

Integrál $\int_Z f$ existuje podle předpokladu o f.

Definujeme funkci $F: X \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_Y f(x,y)\,dy$; pokud pro nějaké $x_0 \in X$ integrál neexistuje, definujeme $F(x_0)$ jako libovolnou hodnotu z intervalu $\left[\underline{\int_Y} f(x_0,y)\,dy, \overline{\int_Y} f(x_0,y)\,dy \right]$. Podobně $G: Y \to \mathbb{R}$, $G(y) := \int_X f(x,y)\,dx$. Věta říká, že

$$F \in \mathcal{R}(X),\ G \in \mathcal{R}(Y) \text{ a } \int_Z f = \int_X F = \int_Y G.$$

V důkazu též ukážeme fakticky, že mn. bodů $x_0 \in X$, pro něž $f(x_0,y) \notin \mathcal{R}(Y)$, má míru 0 a podobně v y-ové souřadnici.

<u>Důkaz.</u> Dokážeme, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_Z f = \int_X F$, pro G je důkaz podobný. Každé dělení D boxu Z je „součinem" $D_1 \times D_2$ dělení D_1 boxu X a dělení D_2 boxu Y, tj. $\forall J \in D$ je součinem $J = J_1 \times J_2$ pro $J_1 \in D_1$, $J_2 \in D_2$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak ex. dělení D boxu Z, že $s(f, D) > \int_Z f - \varepsilon$. Vezmeme dělení D_1 a D_2, že D „$=$" $D_1 \times D_2$. Pak, podle vlastností infima,

$$s(f, D) = \sum_{J \in D} |J| \cdot \inf_J (f) = \sum_{J \in D} \underbrace{|J_1 \times J_2|}_{= |J_1| \cdot |J_2|} \cdot \inf_{\substack{x \in J_1 \\ y \in J_2}} f(x,y)$$

proč platí? – zamyslete se!

$$\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} \Big(\underbrace{\sum_{J_2 \in D_2} |J_2| \inf_{y \in J_2} f(x,y)}_{= s(f(x,\cdot), D_2) \leq \underline{\int_Y} f(x,y)\,dy \leq F(x)} \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{J_1 \in D_1} |J_1| \cdot \inf_{x \in J_1} F(x) = s(F, D_1).$$ Takže

$s(F, D_1) > \int_Z f - \varepsilon$. Analogicky se dokáže, že pro dané $\varepsilon > 0$ ex. dělení D_1' boxu X_1 že $S(F, D_1') < \int_Z f + \varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ to podle D.-ovy def. $\int$ znamená, že $F \in \mathcal{R}(X)$ a $\int_X F = \int_Z f$. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Příklad}}$ $f(x,y,z) = z \cdot \sin(x+y)$, $I \subset \mathbb{R}^3$ dán ~~ještě~~ vztahy $0 \le x \le \pi$, $|y| \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le z \le 1$. Pak

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int_0^{\pi} z \cdot \sin(x+y)\,dx =$$

$$= \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-z \cdot \cos(x+y)\Big|_{x=0}^{\pi}\right) dy = \int_0^1 dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z \cdot \cos y\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2z \sin y \Big|_{y=-\pi/2}^{\pi/2}\right) dz = \int_0^1 4z\,dz = 2.$$

<u>Integrál přes množinu $E \subset \mathbb{R}^n$</u>. Pojem integrálu rozšíříme z boxů $I \subset \mathbb{R}^n$ na obecnější množiny. Zavedeme i objem množiny.

<u>Definice</u> Množina $E \subset \mathbb{R}^n$ je <u>přípustná</u>, když je <u>omezená</u> a její <u>hranice ∂E má míru nula.</u>

$\left(\partial E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall r > 0 : B(x,r) \cap E \neq \emptyset,\ B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset\}\right)$

<u>Příklady</u> ,  jsou přípustné, $\mathbb{Q} \cap ([0,1]^2)$ není přípustná.

<u>Definice</u> <u>Objem</u> omezené množiny $E \subset \mathbb{R}^n$ je integrál $\mathrm{vol}(E) := \int_I \chi_E$, kde I je box obsahující E

a $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \ldots & x \in E \\ 0 \ldots & x \in I \setminus E \end{cases}$, když existuje.

Dá se dokázat:

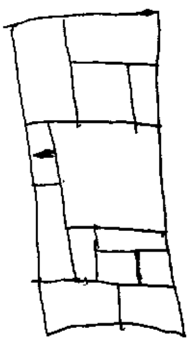
$\boxed{\text{Tvrzení}}$ $E \subset \mathbb{R}^n$ má objem (podle definice) $\iff$ E je přípustná.

Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$ je omezená. <u>Integrál funkce $f : E \to \mathbb{R}$ přes E</u> definujeme jako

$\int_E f := \int_I \bar{f}$, kde I je box obsahující E a $\bar{f}$ je rozšíření f: $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) \ldots & x \in E \\ 0 \ldots & x \in I \setminus E. \end{cases}$

Úlohy: **1.** Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a D je jeho dělení. Dokažte, že $|I| = \sum_{J \in D} |J|$.

2*. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je box a $I = \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ je rozklad I na boxy J_i, které mají disjunktní vnitřky, např. v $\mathbb{R}^2$:



Dokažte, že $|I| = \sum_{i=1}^{k} |J_i|$.

3. Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je neomezená ($I \subset \mathbb{R}^n$ je box). Co se stane v R-ově def. $\int$? Jak vypadají $\underline{\int_I} f$ a $\overline{\int_I} f$?

4. Zdůvodněte, proč ve Fub. větě je množina $\{x_0 \in X \mid \int_Y f(x_0, y)\,dy \text{ neexistuje}\}$ má míru 0.

5. Zdůvodněte, proč objem $\mathrm{vol}(E)$ a integrál $\int_E f$ pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ nezávisejí na volbě boxu $I \subset \mathbb{R}^n$ obsahujícího E (když existují).

* * * * * * * * * * * * *