Jméno a příjmení, kruh:

Bonifikační test z Matematické analýzy I, 30. listopadu 2010

Odpovědi vždy zdůvodněte.

1. (4 b.)

   (a) Je množina všech přímek v rovině spočetná?

   Není, je nespočetná. Třeba už jen podmnožina vodorovných přímek je ve vzájemně jednoznačné korespondenci s množinou reálných čísel $\mathbb{R}$, přímce o rovnici $y = c$ odpovídá číslo c. A o $\mathbb{R}$ jsme si dokázali, že není spočetná množina. (Není těžké ukázat pomocí zápisu přímek rovnicemi, že i celá množina všech přímek je ve vzájemně jednoznačné korespondenci s $\mathbb{R}$.)

   (b) Nalezněte supremum $\sup(X)$ množiny reálných čísel

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty}(1 - 1/n, 2 + 1/n) = (0, 3) \cap (0.5, 2.5) \cap \ldots .$$

   $\sup(X) = 2$, dokonce $\max(X) = 2$. Množina X je definovaná jako průnik nekonečné posloupnosti intervalů $(0, 3), (0.5, 2.5), (2/3, 7/3), (3/4, 9/4), \ldots$, které se neomezeně smrskávají k intervalu $[1, 2]$, takže $X = [1, 2]$. Podle definice je supremum X rovné 2, je to dokonce největší prvek množiny X. Proč $X = [1, 2]$? Pokud číslo x splňuje nerovnosti $1 \leq x \leq 2$, splňuje pro každé n i nerovnosti $1 - 1/n < x < 2 + 1/n$, takže interval $[1, 2]$ je celý obsažen v průniku. Pokud x jednu z obou nerovností nesplňuje, např. $x > 2$ (případ $x < 1$ je podobný), pak pro dostatečně velké n je i $x > 2+1/n$ a $x \notin (1-1/n, 2+1/n)$ pro toto n (ani pro žádné větší), takže x není v průniku. Průnik se tedy přesně rovná intervalu $[1, 2]$.

2. (4 b.) Ano nebo ne:

   (a) Pro každou posloupnost reálných čísel (a_n) a každé reálné číslo α platí, že když $\lim a_n$ neexistuje (vlastní ani nevlastní), potom ani $\lim \alpha a_n$ neexistuje (vlastní ani nevlastní).

   Ne. Protipříkladem je třeba posloupnost $a_n = (-1)^n$, která nemá limitu, a číslo $\alpha = 0$. Protože $\alpha a_n = 0$ pro každé n, je $\lim \alpha a_n = 0$. Je ovšem pravda, že když se omezíme na nenulová čísla α, je podle aritmetiky limit odpověď „ano“.

(b) Pro každé dvě posloupnosti reálných čísel (a_n) a (b_n) platí, že když $\lim a_n$ neexistuje (vlastní ani nevlastní) a $\lim b_n$ existuje (vlastní nebo nevlastní), potom $\lim(a_n + b_n)$ neexistuje (vlastní ani nevlastní).

Ne. Protipříkladem je třeba posloupnost $a_n = (-1)^n$, která nemá limitu, a posloupnost $b_n = n$, která má nevlastní limitu $+\infty$. Pak $a_n + b_n = n + (-1)^n$ má stále nevlastní limitu $+\infty$. Je ovšem pravda, že když budeme (ne)existenci limity chápat úžeji jako (ne)existenci pouze vlastní limity, je opět podle aritmetiky limit odpověď „ano“.

3. (4 b.) Zjistěte, zda existuje následující limita a pokud ano, spočtěte ji.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n}{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1}$$

Limita se rovná 1/2. Protože $2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$ (což plyne třeba z $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ pro $a = 2, b = 1$), máme limitu zlomku

$$\frac{2^n + n}{2^{n+1} - 1} = \frac{1/2 + n/2^{n+1}}{1 - 1/2^{n+1}}.$$

Limita čitatele je $\lim(1/2 + n/2^{n+1}) = 1/2 + \lim n/2^{n+1} = 1/2 + 0 = 1/2$ a jmenovatele $\lim(1 - 1/2^{n+1}) = 1$. Celkem je tedy limita zlomku rovna $\frac{1/2}{1} = 1/2$. Použili jsme větu o aritmetice limit a fakt, že $\lim n/2^{n+1} = 0$.

4. (4 b.) Nechť je posloupnost (a_n) definovaná jako $a_n = n$ pro sudé $n = 2, 4, \ldots$ a jako $a_n = 1/n$ pro liché $n = 1, 3, \ldots$. Rozhodněte, zda konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Nekonverguje. Sčítance dané řady $-1/1 + 2 - 1/3 + 4 - 1/5 + 6 - 1/7 + \ldots$ nejdou v limitě k 0 a nesplňují nutnou podmínku konvergence.