MATEMATICKÉ STRUKTURY (NMAI064)
letní semestr 2022/23
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 12 (17. 5. 2023). TOPOLOGIE 3: KOMPAKTNÍ PROSTORY

(podle skript prof. A. Pultra, kapitola V.6)

• *Kompaktnost. Pokrytí* topologického prostoru (X, τ) je libovolná podmnožina $\mathcal{U} \subseteq \tau$ splňující, že $\bigcup \mathcal{U} = X$. Pro $Y \subseteq X$ je *pokrytí* množiny Y libovolná podmnožina $\mathcal{U} \subseteq \tau$ splňující, že $\bigcup \mathcal{U} \supseteq Y$. Prostor (X, τ) je *kompaktní*, pokud

$$\forall \text{ pokrytí } \mathcal{U} \ \exists \text{ konečné } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \left(\bigcup \mathcal{V} = X \right) .$$

Říkáme, že každé pokrytí (prostoru X) má konečné podpokrytí. Podobně $Y \subseteq X$ je kompaktní podmnožina, pokud každé její pokrytí má konečnou podpokrytí.

Úloha 1 *Nechť $Y \subseteq X$, kde (X, τ) je topologický prostor. Dokažte, že Y je kompaktní, právě když je podprostor $(Y, \tau \mid Y)$ kompaktní.*

Úloha 2 *Ukažte, že každý konečný topologický prostor je kompaktní.*

Věta 3 (dvě vlastnosti kompaktnosti) *Jsou následující.*

1. *Každá uzavřená podmnožina v kompaktním prostoru je kompaktní.*
2. *Souvislý obraz kompaktní množiny je vždy kompaktní.*

Důkaz. 1. Nechť (X, τ) je kompaktní prostor, $Y \subseteq X$ je uzavřená množina a $\mathcal{U} \subseteq \tau$ je pokrytí Y. Potom $\mathcal{U} \cup \{X \setminus Y\}$ je pokrytí X. Vezmeme z něj konečné podpokrytí $\mathcal{V}$ množiny X. Je jasné, že $\mathcal{V} \setminus \{X \setminus Y\} \subseteq \mathcal{U}$ je konečné podpokrytí množiny Y.

2. Nechť $f\colon (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ je souvislé zobr. definované na kompaktním prostoru X (srov. úlohu 1) a nechť $\mathcal{U} \subseteq \sigma$ je pokrytí $f[X]$. Pak

$$\{f^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$$

je pokrytí X. Protože X je kompaktní, existuje taková konečná podmnožina $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, že

$$\{f^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{V}\}$$

je stále pokrytí X. Vzhledem k tomu, že $f[f^{-1}[U]] = U$, je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ konečné podpokrytí množiny $f[X]$. $\square$

Úloha 4 *Může být otevřená množina kompaktní?*

• *Alexandrovo lemma.* Je to užitečný výsledek: abychom dokázali, že topologie je kompaktní, stačí ověřit existenci konečného podpokrytí pouze pro jakoukoli subbázi.

Věta 5 (Alexandrovo lemma) *Předpokládejme, že (X, τ) je topologický prostor a že $\mathcal{S} \subseteq \tau$ je taková subbáze, že každé pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ má konečné podpokrytí. Pak je X kompaktní.*

Důkaz. Postupujeme sporem: předpokládáme, že X není kompaktní, ale že současně každé pokrytí vybrané ze subbáze $\mathcal{S}$ má konečné podpokrytí. Řekneme, že pokrytí $\mathcal{U} \subseteq \tau$ je *velké*, pokud nemá žádné konečné podpokrytí. Podle našeho předpokladu existuje velké pokrytí. Dokážeme následující.

> Existuje vzhledem k inkluzi maximální velké pokrytí $\mathcal{A}$. Je to tedy takové velké pokrytí, že přidáním libovolné $U \in \tau \setminus \mathcal{A}$ k $\mathcal{A}$ vznikne pokrytí, které má konečné podpokrytí.

Argumentujeme standardně pomocí Zornova lemmatu, jež zopakujeme níže v úloze 6. Vezmeme tedy množinu všech velkých pokrytí, částečně ji uspořádáme inkluzí a ověříme, že je splněn předpoklad horní meze Zornova lemmatu. Předpokládejme, že Y je řetězec velkých pokrytí. Pak $\mathcal{U}' := \bigcup Y$ je velké pokrytí, jež je horní mezí Y. Opravdu, kdyby $\mathcal{U}'$ mělo konečné podpokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}'$, existovalo by $\mathcal{U}'' \in Y$ takové, že $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}''$ (protože Y je řetězec a v jakémkoli řetězci má jakákoli konečná podmnožina největší prvek), v rozporu s faktem, že $\mathcal{U}''$ je velké pokrytí. Předpoklad Zornova lemmatu je tedy v naší situaci splněn a podle Zornova lemmatu existuje maximální velké pokrytí $\mathcal{A}$.

Nechť $\mathcal{B} := \tau \setminus \mathcal{A}$. Pak pro všechny $U \in \tau$,

$$U \in \mathcal{B} \iff \exists\, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{A} \left(U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X\right) .$$

Implikace $\Rightarrow$ plyne z maximality množiny $\mathcal{A}$ a opačná implikace $\Leftarrow$ plyne ze skutečnosti, že $\mathcal{A}$ je velké pokrytí. Ukážeme, že množinový systém $\mathcal{B}$ je uzavřený na nadmnožiny a na konečné průniky. Pokud $V, U \in \tau$ splňují, že $V \supseteq U \in \mathcal{B}$, pak $U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$ pro nějaké $U_i \in \mathcal{A}$, tedy také $V \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n = X$ a $V \in \mathcal{B}$. Pokud $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, pak $U_1 \cup U_1' \cup \cdots \cup U_n' = X$ a $U_2 \cup U_1'' \cup \cdots \cup U_m'' = X$ pro nějaké $U_i', U_j'' \in \mathcal{A}$. Pak ale

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n U_i' \cup \bigcup_{j=1}^m U_j''\right) \subseteq U_1 \cap U_2$$

a $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.

Nyní důkaz dokončíme odvozením sporu s našimi předpoklady. Pro každé $x \in X$ existuje $U \in \mathcal{A}$ takové, že $x \in U$, protože $\mathcal{A}$ je pokrytí. Existuje tedy $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ takové, že

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subseteq U \in \mathcal{A} ,$$

protože $\mathcal{S}$ je subbáze. Podle výše uvedených uzávěrových vlastností systému $\mathcal{B} = \tau \setminus \mathcal{A}$ vidíme, že ne všechny S_i jsou v $\mathcal{B}$. Tedy nějaká $S_i = S_{i(x)} \in \mathcal{A}$. Podle našeho předpokladu o $\mathcal{S}$ má pokrytí

$$\{S_{i(x)} \mid x \in X\}$$

konečné podpokrytí. Ale je to také konečné podpokrytí systému $\mathcal{A}$, ve sporu s faktem, že pokrytí $\mathcal{A}$ je velké. □

Úloha 6 (Zornovo lemma) *Je to výsledek o uspořádání*

$$(X, \leq_X) ,$$

který je ekvivalentní axiomu výběru a říká následující. Pokud každý řetězec $Y \subseteq X$ (tj. $\leq_X$ zúžené na Y je lineární) má horní mez (tj. takové $x \in X$, že $y \leq_X x$ pro každé $y \in Y$), pak pro každé $x \in X$ existuje maximální prvek $x' \in X$ s $x \leq_X x'$ (maximalita znamená, že pro žádné $x'' \in X$ neplatí, že $x' <_X x''$).

Důsledek 7 (o intervalech) *Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je kompaktní (v euklidovské topologii).*

Důkaz. Předpokládáme, že $a < b$ (pro $a \geq b$ je výsledek triviální) a ověříme podmínku pokrytí pro subbázi

$$\mathcal{S} = \{[a,\, c) \mid c \in (a,\, b)\} \cup \{(c,\, b] \mid c \in (a,\, b)\}$$

euklidovské topologie na $[a, b]$. Nechť $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ je pokrytí a nechť

$$d := \sup(\{c \in (a,\, b) \mid [a,\, c) \in \mathcal{U}\}) \in [a,\, b]$$

(množina je neprázdná, protože a nemůže být pokryto žádným intervalem $(c, b]$). Bod d musí být pokryt nějakým intervalem $(c, b] \in \mathcal{U}$, tedy $c < d$. Podle definice suprema existuje takové $c' \in (a, b)$, že $[a, c') \in \mathcal{U}$ a $c < c$". Máme konečné (ve skutečnosti dvouprvkové) podpokrytí

$$[a,\, c') \cup (c,\, b] = [a,\, b]$$

pokrytí $\mathcal{U}$. □

• *Tichonovova věta.* Jde o jeden z nejužitečnějších výsledků o kompaktních prostorech, možná v celé topologii.

Věta 8 (A. N. Tichonov, 1935) *Každý součin kompaktních topologických prostorů je kompaktní prostor.*

Důkaz. Důkaz je vlastně snadný. Opět použijeme Alexandrovo lemma. Nechť (X_i, τ_i), $i \in J$, jsou kompaktní prostory a $\mathcal{U}$ je pokrytí množiny $\prod_{i \in J} X_i$, vybrané z definitorické subbáze

$$\mathcal{S} = \{p_i^{-1}[U] \mid i \in J,\, U \in \tau_i\}\ .$$

Pro libovolné $i \in J$ vezmeme

$$\mathcal{U}_i := \{U \in \tau_i \mid p_i^{-1}[U] \in \mathcal{U}\}\ .$$

Tvrdíme, že existuje $k \in J$, pro nějž je $\mathcal{U}_k$ pokrytí prostoru X_k. Pokud ne, pak bychom mohli pro každé $i \in J$ vybrat bod $x_i \in X_i \setminus \bigcup \mathcal{U}_i$. Pak by ale bod $(x_i)_{i \in J}$ v součinu nebyl pokryt v $\mathcal{U}$. Protože X_k je kompaktní, máme konečný podpokrytí $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_k$. Pak

$$\{p_i^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{V}\}$$

je konečné podpokrytí v pokrytí $\mathcal{U}$ součinového prostoru. $\square$

Wikipedie o této větě říká, že ji poprvé vyslovil a dokázal *Andrej Nikolajevič Tichonov (1906–1993)* (který byl kromě matematika také geofyzikem) ve speciálním případu v roce 1935, a že pro obecnou větu je „její nejstarší známý publikovaný důkaz obsažený v článku Eduarda Čecha z roku 1937“. *Eduard Čech (1893 – 1960)* byl světově proslulý český matematik, hlavně topolog.

Uvedeme aplikaci Tichonovovy věty na řádná obarvení nekonečných grafů. Začneme opakováním definice kompaktnosti ve formě úlohy.

Úloha 9 *Topologický prostor* (X, τ) *je kompaktní, právě když každý systém* $\{A_i \mid i \in J\}$ *uzavřených množin v* X *má* vlastnost konečných průniků*:*

$$\big(\forall\ \textit{konečnou}\ I \subseteq J\ \big(\textstyle\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset\big)\big) \Rightarrow \textstyle\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset\ .$$

Pro graf $G = (V, E)$, takže $E \subseteq \binom{V}{2}$, je jeho *řádné* X*-obarvení* každé zobr. $f\colon V \to X$ splňující, že $f(u) \neq f(v)$, jakmile $\{u, v\} \in E$. Bez posledního omezení se funkce f nazývá jednoduše X*-obarvením (grafu* G*). Chromatické číslo* $\chi(G) \in \mathbb{N}$ *grafu* G je definované jako

$$\chi(G) := \min(\{k \in \mathbb{N} \mid \exists\ \text{řádné}\ [k]\text{-obarvení}\ G\})\ ,$$

kde $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Například 5-cyklus

$$C_5 := (\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\ \{\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\},\ \{3,\ 4\},\ \{4,\ 5\},\ \{5,\ 1\}\})$$

má $\chi(C_5) = 3$. Řekneme, že graf $G' = (V', E')$ je *podgrafem* jiného grafu $G = (V, E)$, pokud $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Věta 10 (kompaktnost χ) *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $G = (V, E)$ je graf, jehož množina vrcholů V může být libovolná (tj. libovolné mohutnosti). Pak*

$$\chi(G) \le k \iff \forall \textit{ konečný podgraf } H \textit{ z } G \big(\chi(H) \le k\big)\ .$$

Důkaz. Jinými slovy, G má řádné $[k]$-obarvení, právě když ho má každý jeho konečný podgraf. Část „když" je jasná a stačí dokázat: pokud má každý konečný podgraf H grafu G řádné $[k]$-obarvení, pak ho má i G. Pro každý $v \in V$ vezmeme kopii $X_v := ([k], \mathcal{P}([k]))$ diskrétního prostoru na $[k]$ (kde každá podmnožina v $[k]$ je otevřená a uzavřená) a uvážíme součinový prostor

$$X = (X,\, \tau) := \prod_{v \in V} X_v\ .$$

Všimněme si, že každý bod v něm, $\overline{x} := (x_v)_{v \in V}$ s $x_v \in [k]$, je $[k]$-obarvení grafu G. Pro libovolnou hranu $e = \{u, v\} \in E$ v G uvážíme množinu

$$A_e := \{\overline{x} \in X \mid x_u \neq x_v\}\ .$$

Jsou to přesně $[k]$-obarvení grafu G, jejichž zúžení jsou řádná $[k]$-obarvení jednohranného podgrafu $(\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ grafu G. Neboť každý prostor X_v je diskrétní, z definice součinové topologie τ plyne, že každá množina A_e je uzavřená v X (úloha 13). Protože každý konečný podgraf G má řádné $[k]$-obarvení, předpoklad implikace v úloze 9 je v X pro systém $\{A_e\ ; \mid e \in E\}$ splněn (všimněte si, že řádné obarvení podgrafu se triviálně rozšiřuje na obarvení celého grafu). Protože X je kompaktní podle úlohy 2 a Tichonovovy věty, podle úlohy 9 je

$$\bigcap_{e \in E} A_e \neq \emptyset$$

a celý graf G má řádné $[k]$-obarvení. $\square$

Úloha 11 *Dokažte předchozí ekvivalenci přímo, bez použití Tichonovovy věty, pro* $k = 1$.

Úloha 12 *Dokažte předchozí ekvivalenci přímo, bez použití Tichonovovy věty, pro* $k = 2$.

Úloha 13 *Vysvětlete, proč jsou množiny* A_e *v předchozím důkazu uzavřené.*

- *Kompaktnost v Hausdorffových prostorech.*

Věta 14 (kompakty) *Kompaktní množiny v H. prostorech (tj.* T_2 *prostorech) jsou uzavřené.*

Důkaz. Nechť $Y \subseteq X$ je kompaktní množina v Hausdorffově prostoru (X, τ). Stačí ukázat, že pro každý bod $x \in X \setminus Y$ existuje taková $U_x \in \tau$, že $x \in U_x \subseteq X \setminus Y$. Pak je $X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x$ otevřená a Y je uzavřená. Fixujeme $x \in X \setminus Y$ a pro $y \in Y$ vezmeme takové množiny $U_{x,y}, V_y \in \tau$, že

$$x \in U_{x,y} \wedge y \in V_y \wedge U_{x,y} \cap V_y = \emptyset \; .$$

To lze, protože X je Hausdorffův prostor. Protože $\{V_y \mid y \in Y\}$ je pokrytí Y a Y je kompaktní, existuje konečně mnoho bodů $y_1, \dots, y_n \in Y$, že $\{V_{y_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ je pokrytí Y. Nechť

$$U_x := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,\,y_i} \; .$$

Tuto množina jsme hledali: je otevřená, obsahuje x a je disjunktní s Y, protože je disjunktní s nadmnožinou $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ množiny Y. $\square$

Důsledek 15 (o inverzních zobr.) *Inverzní zobr. ke spojité injekci z kompaktního prostoru do Hausdorffova prostoru je spojité.*

Důkaz. Předpokládejme, že (X, τ) je kompaktní prostor, (Y, σ) je Hausdorffův prostor a $f\colon X \to Y$ je spojitá injekce. Pak pro každou uzavřenou množinu $A \subseteq X$ je

$$(f^{-1})^{-1}[A] = f[A] \subseteq Y \ .$$

Podle části 1 věty 3 je množina A kompaktní a podle části 2 stejné věty je kompaktní také $f[A]$. Podle předchozí věty je $f[A]$ uzavřená. Vzor každé uzavřené množiny v X zobrazením f^{-1} je tedy uzavřený a f^{-1} je spojité. □

Věta 16 (kompaktní H. pr. je ...) $\forall$ *kompaktní H. prostor* (X, τ) *je normální, tj. je* T_4 *prostor.*

Důkaz. Nechť $A \subseteq X$ je uzavřená množina a $x \in X \setminus A$ je bod. Podle části 1 věty 3 je množina A kompaktní. Argumentem jako v důkazu předchozí věty získáme otevřené množiny $U, V \in \tau$ splňující $x \in U$, $A \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$ (úloha 17). Nyní nechť $A, B \subseteq X$ jsou dvě disjunktní uzavřené množiny. Pomocí předchozího kroku vezmeme pro libovolné $x \in A$ takové množiny $U_x, V_x \in \tau$, že

$$x \in U_x \wedge B \subseteq V_x \wedge U_x \cap V_x = \emptyset \ .$$

Podle části 1 věty 3 je množina A kompaktní. Z pokrytí $\{U_x \mid x \in A\}$ množiny A vybereme konečné podpokrytí a získáme body x_1, $\ldots$, $x_n \in A$, že A je pokryta pomocí U_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \supseteq A \ \text{ a } \ \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \supseteq B$$

jsou disjunktní otevřené množiny oddělující A a B. $\square$

Úloha 17 *Vysvětlete podrobně, jak v předchozím důkazu získáme otevřené množiny U a V.*

• *Lokálně kompaktní prostory a Lindelöfovy prostory.* Topologický prostor (X, τ) je *lokálně kompaktní*, pokud pro každý bod $x \in X$ a každou otevřenou množinu $U \ni x$ existuje takové kompaktní okolí K bodu x, že $x \in K \subseteq U$. Tedy existuje otevřená množina V a kompaktní množina K, že

$$x \in V \subseteq K \subseteq U \ .$$

Lokální kompaktnost hraje důležitou roli v matematice, protože postačuje v mnoha situacích, kdy celý prostor kompaktní není.

Úloha 18 *Je euklidovský interval* $(0, 1)$ *lokálně kompaktní?*

Kompaktní prostor nemusí být lokálně kompaktní, ale máme následující výsledek.

Úloha 19 *Ukažte, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní.*

Topologický prostor (X, τ) je *Lindelöfův*, pokud má každé pokrytí nejvýše spočetné podpokrytí.

Věta 20 (o regulárních L. pr.) *Každý regulární prostor (tj. T_3 prostor), který je Lindelöfův, je normální (tj. T_4 prostor).*

Důkaz. Předpokládáme, že (X, τ) je regulární L. prostor a že $A, B \subseteq X$ jsou dvě disjunktní uzavřené množiny. Oddělíme je disjunktními otevřenými množinami U a V.

Regularitou oddělíme libovolný bod $x \in A$ a množinu B dvěma disjunktními otevřenými množinami. Tak dostaneme množinu $U_x \in \tau$ splňující

$$x \in U_x \subseteq \overline{U_x} \subseteq X \setminus B\ .$$

Pomocí úlohy 21 vybereme z pokrytí $\{U_x \mid x \in A\}$ množiny A nejvýše spočetné podpokrytí $U_1, U_2, \dots$. Můžeme předpokládat, že $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ (tyto množiny nahradíme sjednoceními $U_1, U_1 \cup U_2, \dots$). Takže

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \wedge A \subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \wedge \forall i \left(\overline{U_i} \cap B = \emptyset\right)\ .$$

Podobně dostaneme množiny $V_i \in \tau$ splňující

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \wedge B \subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \wedge \forall i \left(\overline{V_i} \cap A = \emptyset\right)\ .$$

Nechť

$$U := \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{U_i \cap (X \setminus \overline{V_i})}_{U'_i} \quad \text{a} \quad V := \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{V_i \cap (X \setminus \overline{U_i})}_{V'_i}\ .$$

Patrně to jsou požadované množiny. Konkrétně $U, V \in \tau$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$, protože pro každou dvojici indexů i, j je $U'_i \cap V'_j = \emptyset$ (posloupnosti množin (U_i) a (V_i) rostou, takže pro $i \leq j$ platí, že $U_i \cap (X \setminus \overline{U_j}) = \emptyset$, a pro $j \leq i$ podobně platí, že $V_j \cap (X \setminus \overline{V_i}) = \emptyset$). $\square$

Úloha 21 *Dokažte, že každý uzavřený podprostor Lindelöfova prostoru je Lindelöfův prostor.*

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Zde je šest otázek ke zkoušce. Budu zkoušet pouze tyto, tedy ne první část, kterou učil prof. A. Pultr.

1. Ukažte, že AC implikuje existenci neměřitelné množiny — d. 11 v př. 9.
2. Vysvětlete paradox proroka — v. 21 v př. 9.
3. Vysvětlete způsoby zavedení topologie na a množině a dokažte, že Sorgenfreyova přímka nemá spočetnou bázi — př. 19 a t. 13 v př. 10.
4. Vysvětlete hierarchii separačních axiomů pro topologické prostory a dokažte, že metrizovatelná topologie je normální — př. 11 a ú. 19 v př. 11.
5. Definujte kompaktní prostory, dokažte Tichonovovu větu a uveďte její aplikaci — př. 12 a v. 8 a 10 v př. 12.
6. Uveďte (a dokažte) výsledky o kompaktních množinách v Hausdorffových prostorech — př. 12.