MATEMATICKÉ STRUKTURY (NMAI064)
letní semestr 2022/23
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 11 (3. 5. 2023). TOPOLOGIE 2: STANDARDNÍ KONSTRUKCE A ODDĚLOVACÍ AXIOMY

(podle skript prof. A. Pultra, kapitola V.4–V.5)

• *Podprostory.* Nechť (X, τ) je topologický prostor a nechť $Y \subseteq X$. Lehce se vidí, že

$$\tau \,|\, Y := \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

je topologie na Y. Tato topologie je označována jako *topologie podprostoru* nebo jako *topologie indukovaná na podmnožině.*

Úloha 1 *Nechť $Y \subseteq X$ a (X, τ) je topologie. Dokažte, že $(Y, \tau \,|\, Y)$ je topologický prostor. Uveďte příklad množin $Z \subseteq Y \subseteq X$, že Z je otevřená v prostoru Y, ale ne v prostoru X.*

Pro zobrazení vložení $j\colon Y \to X$, $j(y) = y$, máme $Y \cap U = j^{-1}[U]$. Tedy $j\colon (Y, \tau \,|\, Y) \to (X, \tau)$ je spojité. Navíc je tato topologie extrémní v tom smyslu, že $\tau \,|\, Y$ je nejmenší systém otevřených množin nezbytný k tomu, aby j bylo spojité. To má důležitý důsledek.

Tvrzení 2 (o podprostorech) *Nechť Y je podprostor prostoru X, $j\colon Y \to X$ je zobrazení vložení a $g\colon Z \to Y$ je zobrazení. Pokud je zobrazení $jg\colon Z \to X$ spojité, pak g je také spojité.*

Úloha 3 *Dokažte toto tvrzení.*

Vidíme, že pro libovolný prostor (X, τ) a $Y \subseteq X$ jsou v prostoru $(Y, \tau \,|\, Y)$ uzavřené množiny přesně množiny tvaru $A \cap Y$, kde A je uzavřená v X. Uzávěr množiny M se získá z původního uzávěru jako $\overline{M} \cap Y$ a okolí jsou průniky původních okolí s Y.

Vložení podprostoru. Trochu obecněji, pokud (X, τ) a (Y, θ) jsou topologické prostory, pokud $j\colon Y \to X$ je prosté zobrazení a pokud

$$\theta := \{j^{-1}[U] \mid U \in \tau\} ,$$

o j mluvíme jako o *vložení podprostoru.* Uvědomte si, že toto je přesně ten případ, kdy je restrikce $(x \mapsto j(x))\colon Y \to j[Y]$ zobrazení j homeomorfismus.

• *Součiny.* Mějme systém (X_i, τ_i), $i \in J$, topologických prostorů. Na kartézském součinu $\prod_{i\in J} X_i$ definujeme topologii τ subbází

$$\{p_j^{-1}[U] \mid j \in J,\, U \in \tau_j\} ,$$

kde $p_j\colon \prod_{i\in J} X_i \to X_j$ jsou standardní projekce $(x_i)_{i\in J} \mapsto x_j$. Takto získaný topologický prostor se nazývá *součin systému* (X_i, τ_i), $i \in J$, a pokud chceme zdůraznit, že mluvíme o prostoru a ne pouze o nosné množině $\prod_{i\in J} X_i$, píšeme

$$\prod_{i\in J} (X_i,\, \tau_i) .$$

Pro konečné systémy píšeme

$$(X_1,\, \tau_1) \times (X_2,\, \tau_2),\ X \times Y \times Z,\ X_1 \times \cdots \times X_n$$

atd. Všimněte si, že podprostory a součiny jsou projektivně generovány. Topologie je určena požadavkem, aby preferovaná zobrazení (v prvním případě vložení, ve druhém projekce) byla spojitá s co nejmenšími systémy otevřených množin. Podobně níže faktorový (podílový) prostor a suma budou generovány injektivně. Všimněte si také, že pro konečné systémy metrických prostorů získáme topologii v souladu se součiny metrických prostorů, jak jsou známy z kurzu matematické analýzy.

Věta 4 (o součinech) *Nechť*

$$f_i\colon (Y,\theta) \to (X_i,\tau_i),\ \ i \in J\ ,$$

je systém spojitých zobrazení. Pak existuje právě jedno spojité zobrazení

$$f\colon (Y,\theta) \to \prod_{i\in J}(X_i,\,\tau_i)\ ,$$

že $p_i f = f_i$ pro všechna $i \in J$.

Důkaz. Množinové zobrazení f, pro něž $p_i f = f_i$ pro všechna $i \in J$ (konkrétně $f(y) = (f_i(y))_{i\in J}$) je spojité podle důsledku 16 v poslední přednášce (kritérium subbáze): máme

$$f^{-1}[p_i^{-1}[U]] = f_i^{-1}[U]\,.$$

$\square$

• *Faktorové (kvocientní) prostory.* Nechť (X,τ) je topologický prostor a nechť $q\colon X \to Y$ je na. Zejména máme na mysli situaci, kdy na X je ekvivalence E a q je projekce $(x \mapsto Ex)\colon X \to X/E$. Na Y definujeme topologii

$$\theta := \{U \subseteq Y \mid q^{-1}[U] \in \tau\}\ .$$

Je to opět extrémní topologie (zde největší), že konkrétní zobrazení (zde $q\colon X \to Y$) je spojité. Mluvíme o *faktorové* nebo *kvocientní topologii* a o *faktorovém* nebo *kvocientním prostoru* nebo jednoduše o *kvocientu*. Analogicky tvrzení 2 snadno dokážeme:

Tvrzení 5 (o kvocientech) *Nechť Y je kvocient prostoru X podle zobrazení $q\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ je zobrazení. Jestliže $gq\colon X \to Z$ je spojité, pak je také g spojité.*

Úloha 6 *Dokažte toto tvrzení.*

• *Sumy (kosoučiny).* Mějme systém (X_i, τ_i), $i \in J$, topologických prostorů. Na disjunktním sjednocení

$$\coprod_{i\in J} X_i := \bigcup_{i\in J} X_i \times \{i\}$$

definujeme topologii τ bází

$$\{\iota_i[U] \mid i \in J, U \in \tau_i\} ,$$

kde $\iota_j\colon X_j \to \coprod_{i\in J} X_i$ jsou injekce $x \mapsto (x, j)$. Získaný topologický prostor označujeme jako *sumu* nebo *kosoučin* systému (X_i, τ_i). Jsou-li množiny X_i disjunktní, použijeme jako nosič jejich sjednocení $\bigcup_{i\in J} X_i$.

Věta 7 (o sumách) *Nechť*

$$f_i\colon (X_i,\, \tau_i) \to (Y,\, \theta),\ \ i \in J ,$$

je systém spojitých zobrazení. Pak existuje právě jedno spojité zobrazení

$$f\colon \coprod_{i\in J}(X_i,\, \tau_i) \to (Y,\, \theta) ,$$

že $f\iota_i = f_i$ pro všechna $i \in J$.

Důkaz. Samozřejmě je to zobrazení definované pomocí $f((x, i)) = f_i(x)$. $\square$

Další terminologie: pokud τ a θ jsou stejné topologie na téže množině a pokud $\tau \subseteq \theta$, řekneme, že τ je *slabší* (*hrubší*) než θ, a že θ je *silnější* (*jemnější*) než τ.

• *Oddělovací (separační) axiomy T_i.* Jsou to různé podmínky na topologii (X, τ) zajišťující dostatečnou bohatost množinového systému τ otevřených množin. Zhruba řečeno, s rostoucím indexem i tyto axiomy definují bohatší a bohatší topologie.

• *T_0 topologie.* Řekneme, že prostor (X, τ) splňuje *axiom T_0* (nebo že je *T_0-prostor*), pokud

$$\forall\, x,\, y \in X,\, x \neq y\; \exists\, U \in \tau \left(x \in U \not\ni y\right) \vee \left(y \in U \not\ni x\right)\,. \tag{T_0}$$

Úloha 8 *X je T_0-prostor* $\iff$

$$\forall\, x,\, y \in X \left(\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y\right)\,.$$

• *T_1 topologie.* Řekneme, že prostor (X, τ) splňuje *axiom T_1* (nebo že je *T_1-prostor*), pokud

$$\forall\, x,\, y \in X,\, x \neq y\; \exists\, U \in \tau \left(x \in U \not\ni y\right)\,. \tag{T_1}$$

Úloha 9 *X je T_1-prostor, právě když jsou všechny konečné množiny v X uzavřené. Tedy právě tehdy, když je každý bod $\{x\}$, $x \in X$, uzavřená množina.*

• *T_2 topologie.* Řekneme, že prostor (X, τ) splňuje *axiom T_2* (nebo že je *T_2-prostor* nebo že je *Hausdorffův prostor*), pokud

$$\forall\, x,\, y \in X,\, x \neq y\; \exists\, U, V \in \tau \left(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \emptyset\right)\,. \tag{T_2}$$

Tvrzení 10 (spojitá zobr. do T_2-prostorů) *Nechť*

$$f, g\colon X \to Y$$

je spojité zobrazení a Y je Hausdorffův. Potom je množina

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

uzavřená v prostoru X.

Důkaz. Ukážeme, že doplněk

$$M := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

je otevřený v X. Pro libovolné $x \in M$ vezmeme v Y dvě disjunktní otevřené množiny $U_x \ni f(x)$ a $V_x \ni g(x)$. Pak

$$M = \bigcup_{x \in M} f^{-1}[U_x] \cap g^{-1}[V_x]$$

a proto je M otevřená množina v X. □

Podmnožina $M \subseteq X$ v topologickém prostoru je *hustá (v X)*, pokud $\overline{M} = X$. Z předchozího tvrzení máme hned tento důsledek.

Důsledek 11 *Nechť*

$$f, g\colon X \to Y$$

jsou taková spojitá zobrazení do Hausdorffova prostoru Y, že pro nějakou hustou množinu $M \subseteq X$ platí, že $f \mid M = g \mid M$. Potom $f = g$.

Kvazidiskrétní topologie $(X, \leq)$ je T_0, když $\leq$ je částečné uspořádání (a ne pouze předuspořádání). S výjimkou diskrétního případu, a to také platí pro Scottovu topologii, není T_1. Kofinitní topologie je T_1, ale pokud je základní množina nekonečná, není Hausdorffova. Metrizovatelné topologie (a také Sorgenfreyova přímka) jsou Hausdorffovy. Jsou to ale mnohem bohatší topologie, které diskutujeme v následujících odstavcích.

Úloha 12 *Dokažte, že kofinitní topologie je T_1, ale pokud je základní množina nekonečná, není Hausdorffova.*

• *Zariskiho topologie.* Je důležitá topologie používaná v algebraické geometrii.

Věta 13 (zavedeni Zariskiho topologii) *Nechť $n \in \mathbb{N}$, K je komutativní těleso a $K[x_1, \ldots, x_n]$ je okruh polynomů v n proměnných x_i a s koeficienty v K. Pro $P \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ definujeme*

$$Z(P) := \{\overline{a} \in K^n \mid \forall\, f \in P \left(f(\overline{a}) = 0_K\right)\} .$$

Pak

$$(K^n, \{Z(P) \mid P \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]\})$$

je topologie definovaná pomocí uzavřených množin.

Důkaz. Je zřejmé, že $\emptyset$ a K^n jsou v systému množin jako $\emptyset = Z(\{1_K\})$ a $K^n = Z(\{0_K\})$; zde 1_K a 0_K označují odpovídající konstantní polynomy. Pokud P_i, $i \in J$, jsou podmnožiny $K[x_1, \ldots, x_n]$, pak je snadné vidět, že

$$\bigcap\nolimits_{i \in J} Z(P_i) = Z(\bigcup\nolimits_{i \in J} P_i) .$$

Daná soustava množin je tak uzavřena na libovolné průniky. Konečně, pokud $P, Q \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, pak

$$Z(P) \cup Z(Q) = Z(\{fg \mid f \in P,\ g \in Q\}) .$$

Množinový systém je tedy uzavřený na konečná sjednocení. $\square$

Úloha 14 *Dokažte poslední dvě rovnosti.*

Úloha 15 *Dokažte, že Zariskiho topologie je T_1.*

Dá se ukázat, že pokud je těleso K nekonečné, pak se každé dvě neprázdné otevřené množiny Zariskiho topologie protínají, takže není T_2.

• *T_3 topologie.* Prostor (X, τ) splňuje *axiom T_3* (nebo je *T_3-prostor* nebo je *regulární prostor*), pokud

$$\forall\, x \in X\ \forall \text{ uzavřenou množinu } A \subseteq X \text{ s } x \notin A$$
$$\exists\, U, V \in \tau \left(x \in U \wedge A \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset\right)\ . \tag{T_3}$$

Věta 16 (o regulárních prostorech) *Následující tvrzení o topologickém prostoru $X = (X, \tau)$ jsou ekvivalentní.*

1. *X je regulární.*
2. *Pro každý $x \in X$ a každé okolí M bodu x existuje takové uzavřené okolí N bodu x, že $N \subseteq M$.*
3. *Pro každou $U \in \tau$,*
$$U = \bigcup\{V \mid V \in \tau \wedge \overline{V} \subseteq U\}\ .$$

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Nechť $x \in X$ a $M \subseteq X$ je okolí x: existuje takové $W \in \tau$, že $x \in W \subseteq M$. Ale $x \notin X \setminus W$ a tedy podle (1) existují takové $U, V \in \tau$, že $x \in U$, $X \setminus W \subseteq V$ a $U \cap V = \emptyset$. Nechť $N = \overline{U}$. Pak opravdu

$$x \in U \subseteq \overline{U} = N \subseteq X \setminus V \subseteq W \subseteq M\ .$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Nechť $U \in \tau$. Pro každý $x \in U$ vybereme podle (2) k okolí $U \ni x$ otevřenou množinu V_x a uzavřenou množinu N_x tak,

že
$$x \in V_x \subseteq N_x \subseteq U \ .$$
Pak $\overline{V_x} \subseteq U$ a máme $U = \bigcup_{x \in X} V_x$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Předpokládejme, že $x \in X \setminus A$, kde $A \subseteq X$ je uzavřená množina. Pomocí (3) vezmeme $U \in \tau$, že $x \in U$ a $\overline{U} \subseteq X \setminus A$. Potom $U \ni x$ a $X \setminus \overline{U} \supseteq A$ jsou disjunktní otevřené množiny a jsme hotovi. □

• $T_{3.5}$ *topologie.* Prostor (X, τ) splňuje *axiom* $T_{3.5}$ (nebo je $T_{3.5}$-*prostor* nebo je *úplně regulární prostor*), pokud ($[0,1]$ je reálný jednotkový interval s euklidovskou topologií)

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in X\ \forall \text{ uzavřenou množinu } A \subseteq X \text{ s } x \notin A \\ &\exists \text{ spojité zobr. } f\colon X \to [0,1] \big(f(x) = 0 \wedge f[A] \subseteq \{1\}\big) \ . \end{aligned} \qquad (T_{3,5})$$

Snadno vidíme, že podmnožina D intervalu $[0,1]$ je hustá, když pro libovolné $a < b$ v $[0,1]$ existuje $d \in D$, že $a < d < b$. Nechť (X, τ) je topologie. Pro otevřené množiny $U, V \in \tau$ píšeme

$$\begin{aligned} &U <^* V \iff \exists \text{ hustá } D \subseteq [0,\,1] \text{ s } 0,1 \in D\ \forall\, d \in D \\ &\exists\, U_d \in \tau \big(U_0 = U \wedge U_1 = V \wedge (d, e \in D,\, d < e \Rightarrow \overline{U_d} \subseteq U_e)\big) \ . \end{aligned}$$

Věta 17 (o úplně regulárních prostorech) *Následující tvrzení o topologickém prostoru $X = (X, \tau)$ jsou ekvivalentní.*

1. *X je úplně regulární.*
2. *Pro každý $x \in X$ a každou otevřenou množinu $U \ni x$ existuje taková otevřená množina $V \ni x$, že $V <^* U$.*
3. *Pro každou $U \in \tau$,*
$$U = \bigcup\{V \in \tau \mid V <^* U\} \ .$$

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2). Nechť $x \in U \in \tau$. Pomocí (1) vezmeme takové spojité zobr. $f\colon X \to [0,1]$, že $f(x) = 0$ a $f[X \setminus U] \subseteq \{1\}$. Položíme $D := [0,1]$ a

$$U_a := f^{-1}[\,[0,\ (1+a)/2)\,],\ a \in [0,\ 1]\ .$$

Potom $U_1 = U$. Je zřejmé, že $x \in U_0 <^* U_1 = U$.

Implikace (2) $\Rightarrow$ (1) vyplývá z tvrzení 18 o spojitém zobr. v minulé přednášce.

Že platí ekvivalence (2) $\iff$ (3), je zřejmé. $\square$

• *T_4 topologie.* Prostor (X,τ) splňuje *axiom T_4* (nebo je *T_4-prostor* nebo je *normální prostor*), pokud

$$\begin{aligned}&\forall \text{ uzavřené množiny } A, B \subseteq X \text{ s } A \cap B = \emptyset\\ &\exists\, U, V \in \tau \left(A \subseteq U \wedge B \subseteq V \wedge U \cap V = \emptyset\right)\ .\end{aligned} \tag{T_4}$$

Věta 18 (Urysohnovo lemma) *Prostor X je normální tehdy a jen tehdy, když pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny $A, B \subseteq X$ existuje takové spojité zobrazení $f\colon X \to [0,1]$, že $f[A] \subseteq \{0\}$ a $f[B] \subseteq \{1\}$.*

Důkaz. Implikace $\Leftarrow$. Nechť $A, B \subseteq X$ jsou uzavřené a disjunktní. Vezmeme uvedené zobr. f. Potom například $f^{-1}[\,[0,1/3)\,] \supseteq A$ a $f^{-1}[\,(2/3,1]\,] \supseteq B$ jsou disjunktní otevřené množiny.

Implikace $\Rightarrow$. Množiny A a B oddělíme otevřenými a disjunktními množinami U a V a položíme $U(0) := U$ a $U(1) := X \setminus B$. Předpokládejme, že otevřené množiny $U(d)$ již byly definovány pro všechny $d = k/2^m$ s $m = 0, 1, \ldots, n$ a $0 \le k \le 2^m$, takže $\overline{U(d)} \subseteq U(e)$, když $d < e$. Vezmeme disjunktní uzavřené množiny $\overline{U(k/2^n)}$ a $X \setminus U((k+1)/2^n)$, oddělíme je disjunktními otevřenými množinami $U \supseteq U(k/2^n)$ a $V \supseteq X \setminus U((k+1)/2^n)$ a položíme $U((k+1)/2^{n+1}) := U$. Takto induktivně získáme, pro všechna dyadická racionální čísla $d \in [0,1]$, otevřené množiny $U(d)$ splňující předpoklad tvrzení 18 o spojitém zobr. z minulé přednášky. Pomocí něj získáme požadovanou funkci oddělující A a B. $\square$

Úloha 19 *Dokažte, že každý* MP (M,ρ) *nese normální topologii* (M,τ). *Nápověda: oddělte disjunktní uzavřené množiny* $A, B \subseteq M$ *pomocí funkce* $f\colon M \to [0,1]$ *dané jako*

$$f(x) = \frac{\rho(x,\, A)}{\rho(x,\, A) + \rho(x,\, B)}\ ,$$

kde $\rho(x,A)$ *je vzdálenost bodu* x *od množiny* A.

Úloha 20 *Ukažte, že metrizovatelná topologie* (M,τ) *je* T_1.

• *Separační axiomy a standardní konstrukce.* Sekvence

$$T_0 \Leftarrow T_1 \Leftarrow T_2 \Leftarrow T_3 \wedge T_1 \Leftarrow T_{3.5} \wedge T_1 \Leftarrow T_4 \wedge T_1$$

směřuje z obecných prostorů do prostorů stále více „geometrických“ (hned uvidíme[1], že prostory splňující $T_{3.5} \wedge T_1$ vypadají téměř jako podprostory euklidovských prostorů — s tím rozdílem, že mohou mít nekonečnou „dimenzi“).

Žádnou z výše uvedených implikací nelze obrátit. U prvních dvou jsme již uvedli příklady. Dokázat, že Hausdorffův prostor není nutně regulární je také velmi snadné a vidět, že úplná regulárnost neimplikuje normalitu také není příliš těžké. Ale vztah úplné regulárnosti a regulárnosti byly poměrně dlouho otevřeným problémem.

Dále si všimněte přidaných požadavků T_1. Bez dalšího předpokladu by „vyšší“ separační axiomy neimplikovaly ty „nižší“. Abychom

[1] Viz kapitola V.5.9.

získali T_1 z (úplné) regulárnosti, stačilo by přidat jen T_0. Normalita plus T_0 však nedává T_1.

Žádné oddělovací axiomy se nezachovávají při faktorizaci (triviální příklad: zobraz $\mathbb{R}$ na $\{0,1\}$ posláním racionálních čísel na 0 a iracionálních na 1, pak kvocientová topologie není ani T_0). Na druhou stranu suma zachovává všechny T_i z triviálních důvodů.

Zajímavější jsou podprostory a součiny.

Věta 21 (podprostory a součiny) *Axiomy T_i, $i = 0, 1, 2, 3$ a $3,5$ jsou zachovány v podprostorech a produktech.*

Důkaz. Případy $i = 0, 1, 2$ jsou triviální. Pokud $(x_i)_{i\in J} \neq (y_i)_{i\in J}$ v součinu, pro nějaké k je $x_k \neq y_k$ v prostoru X_k. Body x_k a y_k oddělíme pomocí U, nebo pomocí U a V, a použijeme množiny $p_k^{-1}[U]$ a $p_k^{-1}[V]$.

Regulárnost a úplná regulárnost. Pokud je X (úplně) regulární, $Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$ je uzavřená v Y, a pokud $y \in Y$ je taková, že $y \notin A$, zvolíme B uzavřenou v X tak, že $A = B \cap Y$. Potom $y \notin B$ a pokud oddělíme y od B v X (pomocí otevřených množin U, V nebo pomocí reálné funkce f), dále $U \cap Y$ a $V \cap Y$, resp. $f \,|\, Y$, podle potřeby oddělíme y od množiny A.

Nyní nechť X_i, $i \in J$, jsou regulární (resp. úplně regulární), nechť $A \subseteq X = \prod_{i\in J} X_i$ je uzavřená a nechť $x \in U := X \setminus A$. Protože U je otevřená v X, existují takové $i_1, \dots, i_n \in J$, že $x \in \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}[U_j]$ pro nějakou U_j otevřenou v X_{i_j}. V regulárním případu zvolíme (podle věty 16) množiny V_j otevřené v X_{i_j} a takové, že $x_{i_j} \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j$. Položíme $V = \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}[V_j]$ a $W = X \setminus \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}[\overline{V_j}]$. Potom $x \in V$; pokud $y \in A$ máme $y \notin \bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}[U_j]$ a tedy pro nějaké k máme $y_{i_k} \notin U_k$, a tedy $y_{i_k} \notin \overline{V_k}$ a $y \in W$ a $A \subseteq W$. Je zřejmé, že $V \cap W = \emptyset$.

V úplně regulárním případu zvolíme spojitá zobr. $f_j \colon X_{i_j} \to [0,1]$, $j = 1, \dots, n$ tak, že $f_j(x_{i_j}) = 0$ a $f_j[X_{i_j} \setminus U_j] \subseteq \{1\}$. Definujeme $f \colon X \to [0,1]$ jako $f(y) = \max(f_1(y_{i_1}), \dots, f_n(y_{i_n}))$. Je zřejmé, že $f(x) = 0$. Pokud $y \in A$ pak existuje takové j, že $y_{i_j} \notin U_j$ a tedy $f(y) = 1$. Je snadné cvičení dokázat, že f je spojité. $\square$

Normalita se však obecně nezachovává ani v podprostorech ani v součinech. Na příklady ale ještě nejsme připraveni, nejsou však těžké.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 14, 15, 19 a 20.