MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 9 (22. 4. 2022). ÚVOD DO KOMPLEXNÍ ANALÝZY, ČÁST 1

• *Komplexní čísla.* V této a dvou následujících přednáškách postupně dokážeme větu 6 uvedenou níže: má-li funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ všude derivaci, je součtem mocninné řady, tj. existují takové komplexní koeficienty $a_0, a_1, \dots$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ se $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n$. *Komplexní čísla*

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a,\, b \in \mathbb{R}\},\ \ i = \sqrt{-1}\ ,$$

tvoří normované těleso $(\mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot, |\cdots|)$ (viz dříve), s normou $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Úloha 1 *Dokažte pro komplexní čísla trojúhelníkovou nerovnost, že* $\forall\, u, v \in \mathbb{C}:\ |u + v| \le |u| + |v|$.

Je to i metrický prostor $(\mathbb{C}, d)$ s metrikou $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, který je izometrický klasické euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$ a který je úplný.

Úloha 2 *Dokažte, že* $(\mathbb{C}, d)$ *je úplný metrický prostor.*

Symboly $U, U_0, U_1, \dots$ označíme neprázdné otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$ a z je komplexní proměnná. Připomínáme značení

$$\mathrm{re}(a + bi) := a \ \text{ a } \ \mathrm{im}(a + bi) := b$$

pro reálnou a imaginární část čísla $a + bi$. Pro dané $u \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ označíme jako

$$B(u,\, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - u| < r\}$$

kouli se středem u a poloměrem $r > 0$.

• *Holomorfní a analytické funkce.* Pro funkci $f\colon U \to \mathbb{C}$ a bod $z_0 \in U$ je její *derivace* $f'(z_0)$ v bodě z_0 definovaná stejně jako pro reálné funkce:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}\ ,$$

pokud tato limita existuje. Explicitně řečeno, číslo $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ je derivace funkce f v bodě z_0, právě když

$$\begin{aligned}&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0:\ z \in U \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ je *holomorfní (na U)*, má-li v každém bodu $z_0 \in U$ derivaci. *Celá* nebo také *celistvá* funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na celé komplexní rovině $\mathbb{C}$. Komplexní derivace má stejné algebraické vlastnosti jako derivace reálná. Nebudeme je tu znovu dokazovat, důkazy ponecháme jako úlohu.

Tvrzení 3 (vlastnosti derivace) *$f, g\colon U \to \mathbb{C}$ a $h\colon U_0 \to \mathbb{C}$ buďte holomorfní funkce a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Platí následující.*

1. *Funkce $\alpha f + \beta g$ je holomorfní na U a $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.*

2. *Součin fg je holomorfní na U a $(fg)' = f'g + fg'$.*

3. *Když $g \neq 0$ na U, pak je podíl $\frac{f}{g}$ holomorfní na U a $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.*

4. *Když $h[U_0] \subset U$, pak je složená funkce $f(h)\colon U_0 \to \mathbb{C}$ holomorfní na U_0 a $(f(h))' = f'(h) \cdot h'$.*

Úloha 4 *Dokažte toto tvrzení.*

Dále, jako pro reálné funkce, pro $n \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{C}$ máme $(z^n)' = nz^{n-1}$, derivace konstantní funkce je nulová funkce a každá racionální funkce je holomorfní na svém definičním oboru a její derivace je táž jako v reálném případě (tj. je daná touž formulí).

Funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ je *analytická (na U)*, pokud pro každý bod $z_0 \in U$ existují taková komplexní čísla $a_0, a_1, \ldots$, že

$$z \in U \wedge B(z_0, |z - z_0|) \subset U \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

— analytická funkce je v každém kruhu se středem z_0, který je obsažený v definičním oboru, vyjádřená mocninnou řadou s komplexními koeficienty a středem z_0. S MŘami s komplexními koeficienty počítáme úplně stejně jako s reálnými MŘami, jak jsme to popsali v předminulé přednášce.

Úloha 5 *Dokažte, že každá analytická funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ je na U holomorfní.*

• *Čtyři odlišnosti komplexní a reálné analýzy.* **První odlišnost.**

Věta 6 (holom. ⇒ anal.) *Je-li $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ celá funkce, pak existují komplexní koeficienty $a_0, a_1, \ldots$, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ .$$

Pro jednoduchost v našich přednáškách dokážeme jen tuto verzi pro celé funkce, ale platí silnější verze: f je na U holomorfní $\Rightarrow$ f je na U analytická. Pro reálné funkce to zdaleka není pravda:

Úloha 7 *Funkci* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definujeme pro* $x\le 0$ *jako* 0 *a pro* $x\ge 0$ *jako* $f(x)=x^2$*. Dokažte, že (i) pro každé* $x\in\mathbb{R}$ *existuje vlastní derivace* $f'(x)$*, ale (ii) neexistují reálná (ani komplexní) čísla* a_n*, že na okolí* 0 *by bylo* $f(x)=\sum_{n\ge 0} a_n x^n$*. (Návod pro (ii): uvažte derivování* MŘ*.)*

Druhá odlišnost. Funkce $f\colon U\to\mathbb{C}$ je *omezená*, když $\exists\, c>0\ \forall\, z\in U:\ |f(z)|<c$. Dokážeme i následující větu.

Věta 8 (J. Liouville, 1847) *Když je* $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ *celá a omezená funkce, pak je* f *konstantní.*

To pro reálné funkce také neplatí:

Úloha 9 *Dokažte, že funkce* $f(x):=e^{-x^2}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *je protipříkladem pro reálnou Liouvilleovu větu.*

Úloha 10 *Odvoďte z Liouvilleovy věty Základní větu algebry, která praví, že každý nekonstantní komplexní polynom* $p(z)$ *má kořen. (Návod: uvažte (celou?) funkci* $1/p(z)$*.)*

Třetí odlišnost reálné a komplexní analýzy se týká spojitosti derivace.

Důsledek 11 (holom. funkce má $\forall$ derivace) *Každá holomorfní funkce* $f\colon U\to\mathbb{C}$ *má derivace* $f^{(n)}(z)$ *všech řádů* $n\in\mathbb{N}$*. Speciálně je její derivace* $f'\colon U\to\mathbb{C}$ *spojitá funkce.*

Důkaz. Plyne to derivováním MŘ z faktu, že holomorfní funkce je analytická. $\square$

Úloha 12 *Popište funkci* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, která má derivaci* $f'\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, ale nemá druhou derivaci* $f''\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*.*

Úloha 13 *Popište funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má nespojitou derivaci $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Návod: taková funkce byla uvedena v Matematické analýze 1.*

Čtvrtá odlišnost reálné a komplexní analýzy je možná nejvíce překvapující.

Věta 14 (princip maxima modulu) *Nechť $f\colon U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak*

$$\forall\, z_0 \in U\ \forall\, \delta\ \exists\, z \in U:\ 0 < |z - z_0| < \delta \wedge |f(z)| \geq |f(z_0)|\ .$$

Pro žádnou holomorfní funkci f tedy funkce $|f|$ nemá ostré lokální maximum, žádná holomorfní funkce nemá nikde, ani lokálně, graf svého modulu vydutý nahoru. Tuto větu v přednáškách nedokážeme.

Úloha 15 *Ukažte, že funkce $f(x) := 1 - x^2$ vyvrací princip maxima modulu pro reálné funkce.*

• *Úsečky a obdélníky.* Pro důkazy vět 6 a 8 budeme potřebovat integrál přes úsečku a přes hranici obdélníka. Proto tyto geometrické objekty teď definujme. Pro dva různé body $a, b \in \mathbb{C}$ je *úsečka* $u = ab \subset \mathbb{C}$ (mezi a a b) obraz

$$u = ab := \varphi[\,[0,\,1]\,] = \{\varphi(t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$$

intervalu $[0, 1]$ lineární funkcí

$$\varphi(t) := (b - a)t + a\colon [0,\,1] \to \mathbb{C}\ .$$

Je orientovaná pořadím svých konců, takže ab a ba jsou dvě různé úsečky. Má *délku* $|u| = |ab| := |b-a| \geq 0$. *Dělení* p *úsečky* $u = ab$ je $k+1$-tice $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k) \subset u$, $k \in \mathbb{N}$, jejích bodů

$$a_i := \varphi(t_i),\ \ i = 0,\,1,\,\ldots,\,k\ ,$$

které jsou obrazy bodů $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tvořících dělení intervalu $[0, 1]$. Takže $a_0 = a$, $a_k = b$ a body $a_0, a_1, \ldots, a_k$ běží na u od a do b. *Norma* $\|p\|$ dělení p je

$$\|p\| := \max_{1 \le i \le k} |a_{i-1}a_i| = \max_{1 \le i \le k} |a_i - a_{i-1}| \ ,$$

tedy největší délka podúsečky dělení.

Úloha 16 *Dokažte, že pro každé dělení* $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ *úsečky* $u = ab$ *je*

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{i-1}a_i| = |ab|.$$

Pro funkci $f\colon u \to \mathbb{C}$ a dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky u definujeme *Cauchyovu sumu* $C(f, p)$ a její *modifikaci* $C'(f, p)$ jako

$$\begin{aligned} C(f,\, p) \ &:= \ \sum_{i=1}^{k} f(a_i) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C} \ \ \text{a} \\ C'(f,\, p) \ &:= \ \sum_{i=1}^{k} f(a_{i-1}) \cdot (a_i - a_{i-1}) \in \mathbb{C} \ . \end{aligned}$$

Připomínají Riemannovy sumy z definice Riemannova integrálu.

Úloha 17 *Dokažte pro Cauchyovu sumu a její modifikaci odhady*

$$|C(f,\, p)|,\ |C'(f,\, p)| \le \sup_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \ .$$

Obdélník $R \subset \mathbb{C}$ je množina

$$R := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \le \mathrm{re}(z) \le \beta \wedge \gamma \le \mathrm{im}(z) \le \delta\}$$

daná reálnými čísly $\alpha < \beta$ a $\gamma < \delta$. Jeho strany jsou rovnoběžné s reálnou a imaginární osou. Když $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, jde o *čtverec*. *Kanonické vrcholy* obdélníka R jsou $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, kde

$$a := \alpha + \gamma i,\ \ b := \beta + \gamma i,\ \ c := \beta + \delta i \text{ a } d := \alpha + \delta i\ .$$

Začínají levým dolním vrcholem a jdou proti směru hodinových ručiček. *Hranice* ∂R obdélníka R je sjednocení úseček

$$\partial R := ab \cup bc \cup cd \cup da\ .$$

Vnitřek $\mathrm{int}(R)$ obdélníka R je

$$\mathrm{int}(R) := R \setminus \partial R\ .$$

Obvod $\mathrm{obv}(R)$ obdélníka R je součet délek jeho stran,

$$\mathrm{obv}(R) := |ab| + |bc| + |cd| + |da|\ .$$

• *Integrály.* Nechť $f\colon u,\, \partial R \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce definovaná na úsečce u nebo na hranici obdélníka R. Definujeme

$$\int_u f := \lim_{n\to\infty} C(f,\, p_n) \in \mathbb{C}$$

a

$$\int_{\partial R} f := \int_{ab} f + \int_{bc} f + \int_{cd} f + \int_{da} f\ ,$$

kde (p_n) je libovolná posloupnost dělení p_n úsečky u, která splňuje $\lim \|p_n\| = 0$, a (a, b, c, d) jsou kanonické vrcholy obdélníka R. Hodnota $\int_u f$ je *integrál funkce f přes úsečku u* a $\int_{\partial R} f$ je *integrál funkce f přes hranici obdélníka R*. Dokážeme korektnost těchto definic a základní vlastnosti těchto integrálů.

Věta 18 (o integrálech) *Nechť $u = ab$, R a funkce f, g jsou jako v hořejších definicích. Limita definující $\int_u f$ vždy existuje a nezávisí na posloupnosti (p_n). Tedy i $\int_{\partial R} f$ je vždy dobře definovaný. Oba integrály mají následující vlastnosti.*

1. *Pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\int_u(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_u f + \beta \int_u g$ a totéž platí pro $\int_{\partial R}$.*
2. *Platí* ML *odhady*
$$\left| \int_u f \right| \le \max_{z \in u} |f(z)| \cdot |u| \quad a \quad \left| \int_{\partial R} f \right| \le \max_{z \in \partial R} |f(z)| \cdot \mathrm{obv}(R)$$
(viz též úloha 19).
3. *Pro každý vnitřní bod c úsečky $u = ab$, to jest $c \in ab$ a $c \neq a, b$, je $\int_{ab} f = \int_{ac} f + \int_{cb} f$. Též $\int_{ba} f = -\int_{ab} f$.*

Důkaz. Nechť $f\colon u \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Podle úlohy 20 stačí dokázat, že $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, že pro každá dvě dělení p a q úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$ je

$$|C(f, p) - C(f, q)| < \varepsilon\ .$$

Ukážeme, že tato Cauchyova podmínka pro dělení p a q je splněna díky stejnoměrné spojitosti funkce f. Ta vyplývá ze spojitosti f a z kompaktnosti úsečky u (úloha 21). Pro důkaz uvedené podmínky tak nejprve pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta > 0$, že

$$x, y \in u \wedge |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|u|}\ .$$

Nechť $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ a $q = (b_0, b_1, \ldots, b_l)$ jsou dvě dělení úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$, kde navíc předpokládáme, že p zjemňuje

q, to jest že $q \subset p$, tudíž $b_j = a_{i_j}$, $j = 0, 1, \ldots, l$, pro nějaké indexy $0 = i_0 < i_1 < \cdots < i_l = k$. Pak

$$C(f,\, p) \stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^{l} C(f,\, p_j)\ ,$$

kde $p_j := (a_{i_{j-1}}, a_{i_{j-1}+1}, \ldots, a_{i_j})$ je dělení úsečky $u_j := a_{i_{j-1}}a_{i_j} = b_{j-1}b_j$, a

$$C(f,\, q) \stackrel{(2)}{=} \sum_{j=1}^{l} C(g_j,\, p_j)\ ,$$

kde $g_j \colon u_j \to \mathbb{C}$ označuje funkci, která má na u_j konstantní hodnotu $f(b_j)$ $(= f(a_{i_j}))$. Pak

$$\begin{aligned}
& |C(f,\, q) - C(f,\, p)| \\
\stackrel{\text{rovnice (1) a (2), }\Delta\text{-ová ner.}}{\le}\ & \sum_{j=1}^{l} |C(g_j,\, p_j) - C(f,\, p_j)| \\
\stackrel{\text{def. } p_j \text{ a } g_j}{\le}\ & \sum_{j=1}^{l} \left| \sum_{m=a_{i_{j-1}+1}}^{a_{i_j}} (f(a_{i_j}) - f(a_m)) \cdot (a_m - a_{m-1}) \right| \\
\stackrel{\Delta\text{-ová ner., } \delta \text{ a } a_m}{<}\ & \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=a_{i_{j-1}+1}}^{a_{i_j}} \frac{\varepsilon}{|u|} \cdot |a_m - a_{m-1}| \\
\stackrel{\text{úloha 16}}{=}\ & \sum_{j=1}^{l} \frac{\varepsilon}{|u|} \cdot |b_j - b_{j-1}| \stackrel{\text{úloha 16}}{=} \frac{\varepsilon}{|u|} \cdot |u| = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Pro dvě obecná dělení použijeme trik se společným zjemněním. Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta > 0$, jehož existenci jsme dokázali v předchozím odstavci, že pro každá dvě dělení p' a q' úsečky u, že $\|p'\|, \|q'\| < \delta$ a jedno z nich zjemňuje druhé, je $|C(f, p') - C(f, q')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Jsou-li nyní p a q dvě libovolná dělení úsečky u s $\|p\|, \|q\| < \delta$, vezmeme jejich společné zjemnění, dělení $r = p \cup q$. To zjemňuje p i q a splňuje $\|r\| < \delta$. Podle definice δ máme kýženou nerovnost

$$\begin{aligned} |C(f, p) - C(f, q)| &\le |C(f, p) - C(f, r)| + \\ &+ |C(f, r) - C(f, q)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Tím je dokázána existence integrálů $\int_u f$ a $\int_{\partial R} f$.

Důkazy částí 1–3 limitním přechodem $n \to \infty$ jsou snadné. Část 1 plyne z linearity sum $C(\cdot, p_n)$ v první proměnné. První ML odhad plyne z odhadu Cauchyových sum v úloze 17 a druhý plyne z prvního. První identita v části 3 plyne z aditivity Cauchyovy sumy v druhé proměnné: $C(f, p) = C(f, q) + C(f, r)$, když q a r jsou dělení úseček ac a cb a $p = qr$ je spojené dělení úsečky ab (patrně $\|p\| = \max(\|q\|, \|r\|)$). Druhá identita plyne jednak z faktu, že $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, že pro každé dělení p úsečky u s $\|p\| < \delta$ je $|C(f, p) - C'(f, p)| < \varepsilon$ (důsledek stejnoměrné spojitosti funkce f), jednak z toho, že pro každé dělení $p = (a_0, a_1, \ldots, a_k)$ úsečky ba se

$$\begin{aligned} C(f, p) &= \sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_i - a_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{k} f(a_i)(a_{i-1} - a_i) \\ &= -C'(f, p') \,, \end{aligned}$$

kde $p' = (a_0', a_1', \ldots, a_k') := (a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0)$ je dělení úsečky ab vzniklé z p obrácením úsečky ba. Samozřejmě $\|p\| = \|p'\|$. $\square$

Úloha 19 *Proč existují maxima v druhé části předešlé věty?*

Úloha 20 *Ukažte, že když platí Cauchyova podmínka pro Cauchyovy sumy odpovídající dělením p a q, pak existuje vlastní limita definující* $\int_u f$ *a nezávisí na posloupnosti* (p_n).

Úloha 21 *Nechť* $A \subset M$ *je kompaktní množina v metrickém prostoru* (M, d) *a* $f\colon A \to N$ *je spojitá funkce do metrického prostoru* (N, e). *Dokažte, že pak* f *je stejnoměrně spojitá, to jest*

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta :\ \ a,\, b \in A \wedge d(a,\, b) < \delta \Rightarrow e(f(a),\, f(b)) < \varepsilon\ .$$

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 2, 7, 10, 16 a 21. Deadline je (do konce dne) 3. 5. 2022.