MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/21
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 8 (8. 4. 2022). PÓLYOVA VĚTA O NÁHODNÝCH PROCHÁZKÁCH POMOCÍ MOCNINNÝCH ŘAD.

• *Pólyova věta, ale nejprve grafy a procházky.* Než tuto větu, kterou lze stejně dobře zařadit do teorie pravděpodobnosti jako (jak to uděláme zde) do enumerativní kombinatoriky, uvedeme, budeme potřebovat řadu definic. *Graf* $G = (V, E)$ sestává z množiny *vrcholů* V a množiny *hran* $E \subset \binom{V}{2}$. Zde

$$\binom{V}{2} := \{A \mid A \subset V \wedge |A| = 2\}$$

je množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V.

Úloha 1 *Nalezněte vzorec pro počet všech grafů s n-prvkovou množinou vrcholů V.*

V Pólyově větě nás ale budou zajímat jisté nekonečné grafy. Graf $G = (V, E)$ je *d-regulární*, $d \in \mathbb{N}$, má-li každý vrchol d sousedů, to jest

$$\forall\, v \in V:\ |\overbrace{\{u \in V \mid \{u,\, v\} \in E\}}^{N(v)}| = d\ .$$

G je *lokálně konečný*, má-li každý vrchol $v \in V$ jen konečně mnoho sousedů, tj. množina $N(v)$ je konečná. *Procházka* w v grafu $G = (V, E)$ je taková konečná, $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ s *délkou* $|w| := n \in \mathbb{N}_0$, či nekonečná, $w = (v_0, v_1, \ldots)$, posloupnost vrcholů $v_i \in V$, že pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ ($< n$) je $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Vrchol v_0 pojmenujeme jako *start procházky* w. Definujeme

$$d_n(v_0,\, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je proch. se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}| \;,$$

počet procházek v G s daným startem v_0 a s délkou n.

Úloha 2 *Dokažte, že v d-regulárním grafu je*

$$d_n(v_0,\, G) = d^n \;.$$

Rekurentní procházka $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ opětovně prochází startem: existuje $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, že $v_i = v_0$. Jako

$$a_n(v_0,\, G) := |\{w \mid w \subset V \text{ je rek. pr. se startem } v_0 \text{ a } |w| = n\}|$$

označíme počet rekurentních procházek v G s daným startem v_0 a s délkou n.

Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je taková bijekce $f\colon V \to V$, že

$$\forall\, u,\, v \in V:\; \{u,\, v\} \in E \iff \{f(u),\, f(v)\} \in E \;.$$

Úloha 3 *Popište automorfismy cesty P_6 a kružnice C_6 délky* 6. *Zde $V = \{1, 2, \ldots, 6\}$, P_6 má hrany*

$$E = \{\{1,2\},\, \{2,3\},\, \{3,4\},\, \{4,5\},\, \{5,6\}\}$$

a C_6 má hrany

$$E = \{\{1,2\},\, \{2,3\},\, \{3,4\},\, \{4,5\},\, \{5,6\},\, \{6,1\}\} \;.$$

Graf $G = (V, E)$ je *(vrcholově) tranzitivní*, když

$$\forall\, u,\, v \in V\; \exists\, F:\; F \text{ je automorfismus } G \wedge F(u) = v \;.$$

Tvrzení 4 (procházky v grafech) *Počet procházek, popř. rekurentních procházek, dané délky v tranzitivním grafu nezávisí na startu: když je $G = (V, E)$ tranzitivní a lokálně konečný, pak pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každé dva vrcholy $u, v \in V$ je*

$$d_n(u, G) = d_n(v, G), \ \ \textit{popř.} \ \ a_n(u, G) = a_n(v, G) \ .$$

Důkaz. Nechť $u, v \in V$ jsou dané vrcholy a $n \in \mathbb{N}_0$. Jako F označíme automorfismus grafu G posílající u na v. Uvážíme *konečné* množiny procházek v grafu G s délkou n

$$P_n := \{w \mid w \text{ má start } u\} \ \text{ a } \ Q_n := \{w \mid w \text{ má start } v\} \ .$$

Pro zobrazení $J\colon V \to V$ a procházku nebo libovolnou posloupnost vrcholů $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ definujeme

$$J(w) := (J(v_0), \, J(v_1), \, \ldots, \, J(v_n)) \ .$$

Lehce se pak vidí, že funkce

$$P_n \ni w \mapsto F(w) \in Q_n \ \text{ a } \ Q_n \ni w \mapsto F^{-1}(w) \in P_n$$

jsou injekce, takže $|P_n| = |Q_n|$. Pro rekurentní procházky je argument stejný. $\square$

V tranzitivních grafech G budeme tedy počty procházek, popř. rekurentních procházek, s délkou n označovat stručně jako $d_n(G)$, popř. $a_n(G)$.

Úloha 5 *Ukažte příkladem, že v obecném grafu počty procházek závisí na startu.*

Úloha 6 *Dokažte, že nekonečná cesta*

$$P = (\mathbb{Z}, \, \{\{n, \, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z}\})$$

je tranzitivní graf a spočítejte, kolik obsahuje rekurentních procházek s daným startem a délkou 5.

Zobecněním předešlého grafu je pro $d \in \mathbb{N}$ graf

$$\mathbb{Z}^d := (\mathbb{Z}^d,\ \{\{\overline{u},\ \overline{v}\} \mid \textstyle\sum_{i=1}^d |u_i - v_i| = 1\})\ ,$$

kde píšeme $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$.

Úloha 7 *Dokažte, že grafy* $\mathbb{Z}^d$ *jsou tranzitivní a že* $\mathbb{Z}^d$ *je* $2d$*-regulární.*

Věta 8 (G. Pólya, 1921) *Pro* $d = 1$ *a* 2 *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} = 1$$

a pro $d \geq 3$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{d_n(\mathbb{Z}^d)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(\mathbb{Z}^d)}{(2d)^n} < 1\ .$$

Pravděpodobnostně řečeno, v dimenzích $d \leq 2$ pro velké n náhodná procházka délky n skoro jistě opětovně navštíví start, ale v dimenzích $d \geq 3$ ho s pravděpodobností > 0 opětovně nenavštíví.

• *Důkaz Pólyovy věty pomocí MŘ.* Použijeme následující větu o mocninných řadách.

Věta 9 (slabá Abelova) *Když MŘ*

$$U(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

konverguje pro každé $x \in [0, R)$*, kde* $R \in (0, +\infty)$ *je reálné číslo, a má všechny koeficienty* $u_n \geq 0$*, pak následující limita* *a suma jsou definované a rovnají se —*

$$\lim_{x \to R^-} U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \quad (=: U(R))$$

— bez ohledu na to, zda jsou konečné nebo $+\infty$.

Důkaz. Pro každé $N \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n R^n &= \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{N} u_n x^n \\ &\le \lim_{x \to R^-} U(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} u_n R^n \ ,\end{aligned}$$

kde všechny limity a nekonečné součty jsou definované (s možnou hodnotou $+\infty$) díky monotonii a nezápornosti. Úvodní rovnost plyne z faktu, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se $\lim_{x \to R^-} x^n = R^n$. Dvě následující nerovnosti plynou z nezápornosti koeficientů u_n. Limitní přechod $N \to +\infty$ dává větu. $\square$

Pólyovu větu 8 dokážeme jen pro dimenze $d = 2$ a 3. Symboly d_n (popř. a_n) označují jako dříve počet procházek (popř. počet rekurentních procházek) v grafu $\mathbb{Z}^d$ délky n.

Důkaz. Nechť $d = 2$ a $w = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ je procházka v grafu $\mathbb{Z}^2$ s délkou $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť b_n je počet procházek w s $v_n = v_0 = \overline{0}$ a c_n je počet procházek w s $v_n = v_0 = \overline{0}$ ale $v_j \ne \overline{0}$ pro j s $0 < j < n$. Jako v tvrzení 4 díky tranzitivitě grafu $\mathbb{Z}^2$ tyto počty nezávisí na startu procházky. Položíme $c_0 := 0$. Je jasné, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je

$a_n \le d_n$, $c_n \le b_n \le d_n$ a $d_n = 4^n$. Procházky počítané a_n rozdělíme do skupin podle jejich prvního návratu do $\overline{0}$ ve vrcholu v_j. Pomocí vztahů $d_n = 4^n$ a $a_n \le 4^n$ dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ rovnice

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j}, \ \text{ takže } \ \frac{a_n}{4^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j}{4^j} \le 1 \ .$$

Tedy stačí dokázat, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} = 1 \ .$$

Druhý vztah, který použijeme, je mezi MŘami

$$B(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{b_n}{4^n} x^n = 1 + \dots \ \text{ a } \ C(x) = \sum_{n \ge 0} \frac{c_n}{4^n} x^n = \frac{x^2}{4} + \dots \ ,$$

totiž, že

$$B(x) = \frac{1}{1 - C(x)} = \sum_{k \ge 0} C(x)^k \ .$$

Snadno se to nahlédne formálně, tedy jako vztah mezi formálními MŘami, rozdělením procházky počítané b_n jejími $k+1$ návraty do $\overline{0}$ na k úseků s délkami $j_1, j_2, \dots, j_k$ splňujícími $j_1 + \dots + j_k = n$. Ty jsou počítány čísly $c_{j_1}, \dots, c_{j_k}$. Ale tento vztah také platí na úrovni reálných funkcí $B(x)$ a $C(x)$ pro $x \in [0, 1)$, protože obě MŘy mají poloměry konvergence ≥ 1 (neboť $b_n, c_n \le 4^n$).

Nyní stačí dokázat, že

$$\lim_{x \to 1^-} B(x) = +\infty \ .$$

Skutečně, pak hořejší vztah implikuje, že $\lim_{x \to 1^-} C(x) = 1$ a to podle věty 9 dává, že

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{4^j} =: C(1) = \lim_{x \to 1^-} C(x) = 1 \ .$$

To je přesně požadovaný součet nekonečné řady.

Abychom dokázali, že $\lim_{x \to 1^-} B(x) = +\infty$, stačí podle věty 9 dokázat, že

$$B(1) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{4^j} = +\infty \ .$$

To dokážeme spočtením b_n. Patrně $b_n = 0$ pro liché n. Pro sudé délky n je

$$b_{2n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2n)!}{j! \cdot (n-j)! \cdot j! \cdot (n-j)!} = \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}^2 \ .$$

První rovnost plyne uvážením všech j kroků doprava v procházce w. Ty vynucují týž počet j kroků doleva a stejný počet $n-j$ kroků nahoru a dolů. Tyto možnosti počítá multinomický koeficient $\binom{2n}{j,j,n-j,n-j}$. Poslední rovnost plyne ze známé binomické identity v úloze 10. Stirlingův vzorec pro aproximaci faktoriálu (úloha 11) vede na asymptotiku $\binom{2n}{n} \sim cn^{-1/2}4^n$, pro $n \to \infty$ a konstantu $c > 0$. Takže $2n$-tý sčítanec v řadě $B(1)$ je $\sim c^2 n^{-1}$ a

$$B(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 4^{-2n} = +\infty$$

protože $\sum n^{-1} = +\infty$. $\square$

Úloha 10 *Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n} .$$

Návod: $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ *a* $\binom{n}{j}$ *je počet j-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.*

Úloha 11 *Připomeňte si Stirlingův vzorec*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n , \quad n \to \infty .$$

Integrálním odhadem sumy $S(n) := \sum_{m=1}^{n} \log m$ dokažte jeho slabou verzi $S(n) = n\log n - n + O(\log n)$.

Důkaz. Nechť $d = 3$. Veličiny a_n, b_n, c_n a d_n, MŘy $B(x)$ a $C(x)$, a součty řad $B(1)$ a $C(1)$ definujeme jako v předešlém důkazu, jen jsme teď v grafu $\mathbb{Z}^3$ a konstanta 4 je nahrazena konstantou 6. Teď tedy $B(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{6^n} x^n$ a $C(x) := \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{6^n} x^n$. Argument se nemění, jen teď naopak dokážeme, že

$$B(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{6^n} < +\infty ,$$

tedy že řada $B(1)$ konverguje. Pak, protože jako dříve $B(x) = \frac{1}{1-C(x)}$ a podle věty 9 je $B(1) = \lim_{x\to 1^-} B(x)$ a $C(1) = \lim_{x\to 1^-} C(x)$, dostaneme $C(1) = \lim_{x\to 1^-} C(x) < 1$. Čímž jsme jsme hotovi, protože jako dříve je

$$C(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{6^j} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{6^n} .$$

Dokážeme tedy konvergenci řady $\sum_{n\geq 0} b_n/6^n$. Pro liché n je opět $b_n = 0$. Odhadneme shora $b_{2n}/6^{2n}$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ máme horní odhad

$$\begin{aligned}
\frac{b_{2n}}{6^{2n}} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{j,\,k\in\mathbb{N}_0\\ j+k\leq n}} \frac{(2n)!}{j!\cdot j!\cdot k!\cdot k!\cdot (n-j-k)!\cdot (n-j-k)!} \\
&= \binom{2n}{n} 4^{-n} \sum_{\substack{j,\,k\in\mathbb{N}_0\\ j+k\leq n}} \left[\frac{1}{3^n}\binom{n}{j,\ k,\ n-j-k}\right]^2 \\
&\leq \binom{2n}{n} 4^{-n} \max_{\substack{x,\,y\ z\in\mathbb{N}_0\\ x+y+z=n}} \frac{1}{3^n}\binom{n}{x,\ y,\ z} \\
&= \binom{2n}{n} 4^{-n} \frac{1}{3^n}\binom{n}{x_0,\ y_0,\ z_0}\,,
\end{aligned}$$

kde (x_0, y_0, z_0) je (m, m, m), když $n = 3m$, $(m+1, m, m)$, když $n = 3m+1$, a $(m+1, m+1, m)$, když $n = 3m+2$ (zde $m \in \mathbb{N}_0$) — úloha 12. Na první řádce jsme počítali jako v předchozím důkazu: j je počet kroků procházky doprava, k je počet jejích kroků nahoru, a $n - j - k$ je počet jejích kroků dozadu. Druhý řádek představuje jednoduchou algebraickou úpravu. Na třetím jsme využili toho, že podle multinomického rozvoje mocniny $3^n = (1+1+1)^n$ mají čísla $[\ldots]$ součet 1, a použili jsme úlohu 13. Na čtvrtém řádku jsme našli maximální hodnotu trinomického koeficientu podle úlohy 12.

Podle Stirlingova vzorce máme odhady

$$\binom{2n}{n} \ll \frac{4^n}{n^{1/2}} \ \text{ a } \ \binom{n}{x_0,\ y_0,\ z_0} \ll \frac{3^n}{n}\,.$$

Takže

$$\frac{b_{2n}}{6^{2n}} \ll n^{-1/2}\cdot n^{-1} = n^{-3/2}$$

a pro nějakou konstantu $c > 0$ je

$$B(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{6^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_{2n}}{6^{2n}} < c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty \ ,$$

což jsme potřebovali ukázat. $\square$

Úloha 12 *Dokažte, že pro* $a, b \in \mathbb{N}_0$ *s* $a \geq b + 2$ *je*

$$\frac{1}{a! \cdot b!} \geq \frac{1}{(a-1)! \cdot (b+1)!} \ .$$

Úloha 13 *Nechť* $A, a_1, \ldots, a_n \geq 0$ *jsou taková reálná čísla, že* $a_i \leq A$ *a* $a_1 + \cdots + a_n = 1$. *Pak*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq A \ .$$

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 3, 6, 7, 10 a 11. Deadline je (do konce dne) 19. 4. 2022