MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 7 (1. 4. 2022). STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE. MOCNINNÉ ŘADY. ABELOVA VĚTA.

• *Stejnoměrná a bodová konvergence.* Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, jsou na ní definované funkce. Řekneme, že f_n *konvergují (na M) stejnoměrně k f*, symbolicky

$$f_n \rightrightarrows f \text{ (na } M) ,$$

když ($\varepsilon > 0$)

$$\forall\,\varepsilon\;\exists\,n_0 = n_0(\varepsilon)\;\forall\,x \in M:\; n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ .$$

Pokud

$$\forall\,\varepsilon\;\forall\,x \in M\;\exists\,n_0 = n_0(\varepsilon,\,x):\; n \ge n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ ,$$

řekneme, že f_n *konvergují (na M) k f bodově*, symbolicky

$$f_n \to f \text{ (na } M)\ .$$

Jinými slovy, $\forall\,x \in M:\ \lim f_n(x) = f(x)$. Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou, ale ne naopak.

Pro funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$ definujeme její *supremovou normu* $\|f\|_\infty$ jako

$$\|f\|_\infty := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \in [0,\,+\infty) \cup \{+\infty\}\ ,$$

s hodnotou $+\infty$ pro shora neomezenou množinu $\{\dots\}$. Následující tvrzení je jasné.

Tvrzení 1 (kritérium $\rightrightarrows$) *Nechť M, f a f_n jsou jako výše. Pak*
$$f_n \rightrightarrows f \ (na\ M) \iff \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \ .$$

Úloha 2 *Dokažte, že bodová konvergence na konečné množině M je vždy stejnoměrná.*

Úloha 3 *Nechť $M = \mathbb{N}$ a $f_n(x) := \frac{x}{n}$. Nalezněte limitní funkci f a rozhodněte, zda k ní funkce f_n konvergují stejnoměrně.*

Úloha 4 *Nechť $M = [0,1]$ a $f_n(x) := x^n$. Nalezněte limitní funkci f a rozhodněte, zda k ní funkce f_n konvergují stejnoměrně.*

Úloha 5 *Nechť $M = \mathbb{R}$ a $f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n}$. Nalezněte limitní funkci f a rozhodněte, zda k ní funkce f_n konvergují stejnoměrně.*

M, f a f_n buďte jako výše. *Lokálně stejnoměrná konvergence f_n k f (na M)*, symbolicky $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ (na M), znamená, že
$$\forall\, a \in M \; \exists\, \delta > 0 : \ f_n \rightrightarrows f \ (\text{na } M \cap (a-\delta,\, a+\delta)) \ .$$

Věta 6 ($\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ zachovává spojitost) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ pro $n \in \mathbb{N}$, každá funkce f_n je spojitá a*
$$f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f \ (na\ M) \ .$$
Pak i f je spojitá.

Důkaz. Nechť $a \in M$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme $\delta > 0$, že f_n konvergují k f na $N := M \cap (a-\delta, a+\delta)$ stejnoměrně. Vezmeme n_0, že $n \geq n_0 \wedge x \in N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme libovolné $n_1 \geq n_0$ a pak, díky spojitosti f_{n_1}, takové $\delta_0 \in (0, \delta)$, že
$$x \in M \cap (a - \delta_0,\, a + \delta_0) \ (\subset N) \Rightarrow |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| < \varepsilon/3 \ .$$

Pak pro každé $x \in M \cap (a - \delta_0,\, a + \delta_0)$ $(\subset N)$ máme, že

$$\begin{aligned}
&|f(a) - f(x)| \le \\
&\le |f(a) - f_{n_1}(a)| + |f_{n_1}(a) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon
\end{aligned}$$

— funkce f je spojitá v bodě a. $\square$

Snadno se vidí, třeba podle úlohy 4, že pouze bodová limita spojitých funkcí může být nespojitá.

Úloha 7 *Dokažte, že na kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}$ je lokálně stejnoměrná konvergence ekvivalentní stejnoměrné.*

Úloha 8 *Pro $M = \mathbb{R}$ uveďte příklad funkcí $f, f_n \colon M \to \mathbb{R}$, že na M máme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$, ale nikoli $f_n \rightrightarrows f$.*

Pro $M \subset \mathbb{R}$, $f \colon M \to \mathbb{R}$, $f_n \colon M \to \mathbb{R}$ a $s_n = s_n(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ píšeme (a říkáme), že na M

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f\ ,$$

pokud na M

$$s_n \rightrightarrows f, \quad \text{resp.} \quad s_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f, \quad \text{resp.}\ s_n \to f\ .$$

Tvrzení 9 (Weierstrassův test) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $f \colon M \to \mathbb{R}$, $f_n \colon M \to \mathbb{R}$ a $\sum f_n \to f$ (na M). Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f \ \textit{(na } M\textit{)}, \quad \textit{pokud} \quad \sum_{n=1}^{\infty} F_n := \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty\ .$$

Důkaz. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$. Nejdřív ukážeme, že částečné součty $(s_n(x))$ řady $\sum f_n(x)$ jsou na M stejnoměrně Cauchyovy. Buď dáno ε. Protože částečně součty řady $\sum F_n$ jsou Cauchyovy, existuje n_0, že $n \geq m \geq n_0 \Rightarrow F_{m+1} + \cdots + F_n < \varepsilon$. Tedy

$$x \in M \wedge n \geq m \geq n_0 \Rightarrow |s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{m<j\leq n} f_j(x) \right|$$
$$\leq \sum_{m<j\leq n} |f_j(x)| \leq \sum_{m<j\leq n} F_j < \varepsilon.$$

Pro dané ε nyní vezmeme index n_0 zabezpečující stejnoměrnou Cauchyovost pro $\frac{\varepsilon}{2}$. Pak pro dané $x \in M$ vezmeme index $n(x) \geq n_0$, že $|f(x) - s_{n(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, a pro každé $n \geq n_0$ je

$$|f(x) - s_n(x)| \leq |f(x) - s_{n(x)}(x)| + |s_{n(x)}(x) - s_n(x)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Tedy $\sum f_n \rightrightarrows f$ na M. □

• *Mocninné řady. Mocninná řada se středem $a \in \mathbb{R}$ a koeficienty $a_n \in \mathbb{R}$* (a proměnnou $x \in \mathbb{R}$) je funkční řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\ .$$

Pro jednoduchost budeme pracovat jen s mocninnými řadami se středy v nule, takže $a = 0$. *Poloměr konvergence* R MŘ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$:

$$R := \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} \in [0,\ +\infty) \cup \{+\infty\}\ ,$$

kde $\frac{1}{0} := +\infty$ a $\frac{1}{+\infty} := 0$. S těmito konvencemi platí i ekvivalentní vztah $\limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$.

Úloha 10 *Určete poloměry konvergence* MŘ*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!x^n \ .$$

Úloha 11 *Dokažte, že* MŘ *a její formální derivace*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají stejné poloměry konvergence.

Věta 12 (o konvergencích MŘ) *Nechť*

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je MŘ *s poloměrem konvergence R. Pak pro každé reálné x s $|x| < R$ řada $F(x)$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Když $R > 0$, pak na intervalu $(-R, R)$ řada $F(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně ke svému (bodovému) součtu.*

Důkaz. Nechť $0 < R < +\infty$ a $x \in \mathbb{R}$ s $|x| < R$. Vezmeme c a d, $0 < c < 1 < d$, že $d|x|/R < c < 1$, a vezmeme n_0, že pro každé $n \ge n_0$ je $|a_n|^{1/n} < d/R$. Pak pro každé $n \ge n_0$ je

$$|a_n x^n| = (|a_n|^{1/n}|x|)^n < (d|x|/R)^n < c^n$$

a řada $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ absolutně konverguje porovnáním s geometrickou řadou $\sum_{n\ge 0} c^n$. Když $R = 0$, tak reálné x s $|x| < R$ neexistuje, a když $R = +\infty$, tak $\lim |a_n|^{1/n} = 0$ a podle předchozího odhadu máme absolutní konvergenci řady $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Nechť $0 < R < +\infty$ a $x \in \mathbb{R}$ splňuje, že $|x|/R > 1$. Pak

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} > 1\ .$$

Tedy $|a_n x^n| > 1$ pro nekonečně mnoho n a není splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ (tj., že $a_n x^n \to 0$). Když $R = +\infty$, tak reálné x s $|x| > R$ neexistuje, a když $R = 0$, tak $\limsup |a_n|^{1/n} = +\infty$ a $|a_n x^n| > 1$ pro nekonečně mnoho n pro každé $x \neq 0$.

Nechť $S \in \mathbb{R}$ splňuje $0 < S < R$. Pomocí Weierstrassova testu dokážeme, že řada $\sum_{n\ge 0} a_n x^n$ na intervalu $[-S, S]$ stejnoměrně konverguje ke svému součtu. Skutečně, pro nějaké $c \in (0, 1)$ je $|a_n|^{1/n} S < c < 1$ pro každé $n \ge n_0$. S $M := [-S, S]$ tak je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x^n\|_\infty \le \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^{1/n} S)^n < +\infty\ .$$

□

I s pomocí výsledků o AK řadách v minulé přednášce je tak možné zdůvodnit následující kalkul MŘ, důkaz z časových důvodů přeskočíme.

Věta 13 (počítání s MŘ) *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n\ge 0} a_n x^n \quad a \quad B(x) := \sum_{n\ge 0} b_n x^n$$

jsou MŘ*y konvergující na nějakém intervalu* $I := (-a, a)$*, kde* $a > 0$*. Stejně označíme i odpovídající funkce:*

$$A,\, B \colon I \to \mathbb{R}\ .$$

Pro jejich (formální) součet, součin, podíl a derivaci platí následující.

1. MŘ *(formální součet)*

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) + B(x)$.

2. MŘ *(formální součin)*

$$C(x) := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

3. Nechť $b_0 \neq 0$ a $d_n := -b_n/b_0$. Pak existuje $b > 0$, že MŘ *(formální podíl)*

$$\begin{aligned} C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{A(x)}{B(x)} \\ &:= \frac{1}{b_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \ldots)^n \end{aligned}$$

konverguje na intervalu $J := (-b, b)$ a pro každé $x \in J$ je $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

4. MŘ *(formální derivace)*

$$C(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

konverguje na I a pro každé $x \in I$ je $C(x) = A'(x)$.

V části 3 je použita formální geometrická řada:

$$\frac{1}{1 - (d_1 x + d_2 x^2 + \ldots)} = \sum_{n=0}^{\infty} (d_1 x + d_2 x^2 + \ldots)^n \,.$$

Úloha 14 *Nalezněte koeficienty a_0, a_1, a_2 a a_3 v podílu*

$$\frac{1 - x + 2x^2 + x^4 + \dots}{2 - 2x + 4x^2 - 6x^3 + \dots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Úloha 15 *Nalezněte koeficienty a_0, a_1, a_2 a a_3 v součinu*

$$\begin{aligned} &(1 - 5x - 2x^2 + 3x^3 + \dots)(2 - x - x^2 - x^3 + \dots) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

- *Abelova věta.* Nejprve dokážeme jednu užitečnou nerovnost.

Tvrzení 16 (Abelova nerovnost) *Pro $i = 1, 2, \dots, n$ nechť $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{R}$ s $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$, $A_i := a_1 + a_2 + \dots + a_i$ a $A := \max(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|)$. Potom*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq A \cdot b_1 \ .$$

Důkaz. Položíme $A_0 = b_{n+1} := 0$ a máme, že

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i \right| = \left| \sum_{i=0}^{n} A_i (b_i - b_{i+1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |A_i| (b_i - b_{i+1}) \leq A \sum_{i=1}^{n} (b_i - b_{i+1}) \\ &= A \cdot b_1 \ . \end{aligned}$$

$\square$

Věta 17 (Abelova věta) *Nechť*

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

je MŘ *s poloměrem konvergence* $R \in (0, +\infty)$ *a definující funkci* $A\colon (-R, R) \to \mathbb{R}$*. Když řada* $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ *konverguje a má součet*

$$S := \sum_{n \geq 0} a_n R^n \ ,$$

pak je limita zleva v R *funkce* $A(x)$ *rovna* S*:*

$$\lim_{x \to R^-} A(x) = \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S \ .$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti (úloha 18) lze vzít $R = 1$. Pro každé $x \in (0, 1)$ a každé $n \in \mathbb{N}$ pak máme podle Abelovy nerovnosti odhad

$$\begin{aligned}
&\left| S - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right| \\
&\leq \overbrace{\left| S - \sum_{j=0}^{n} a_j \right|}^{z_n} + \left| \sum_{j=0}^{n} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \right| + \left| \sum_{j=0}^{n} a_j x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right| \\
= &\ z_n + \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \overbrace{(1 - x^j)}^{b_j} \right| + \lim_{m \to \infty} \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \overbrace{x^j}^{b_j} \right| \\
\leq &\ z_n + A(n) \cdot (1 - x^n) + B(n) \cdot x^{n+1} \\
< &\ z_n + A(n) \cdot (1 - x^n) + B(n) \ ,
\end{aligned}$$

kde $A(n) := \max(|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|)$, $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$, a $B(n) > 0$ je jakékoli číslo, pro něž je $|\sum_{j=n+1}^{m} a_j| < B(n)$ pro každé m.

Protože $\sum_j a_j$ konverguje k S, můžeme posloupnost čísel $B(n)$ vzít tak, že $\lim B(n) = 0$. Z téhož důvodu existuje $A > 0$, že

$A(n) < A$ pro každé n. Rovněž $\lim z_n = 0$. Buď nyní dáno ε. Vezmeme tak velké n, že $B(n) < \varepsilon/3$ a $z_n < \varepsilon/3$, a pak vezmeme tak malé $\delta > 0$, že $A \cdot (1 - (1 - \delta)^n) < \varepsilon/3$. Pak pro každé $x \in (1 - \delta, 1)$ je

$$\begin{aligned} \left| S - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right| &< z_n + A \cdot (1 - (1 - \delta)^n) + B(n) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

a tedy $\lim_{x \to 1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = S$. $\square$

Úloha 18 *Proč můžeme v důkazu položit $R = 1$?*

Úloha 19 *Odvoďte s pomocí Abelovy věty, že*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \,.$$

(Návod: Taylorův rozvoj funkce $\log(1 + x)$*.)*

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 4, 5, 10, 14 a 19. Deadline je (do konce dne) 12. 4. 2022.