MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 5 (18. 3. 2022). ŘEŠENÍ BASILEJSKÉHO PROBLÉMU POMOCÍ FOURIEROVÝCH ŘAD

• *Basilejský problém.* Ten požadoval nalézt součet řady

$$B := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \; = ?$$

Podle (anglické mutace) Wikipedie tento problém předložil Pietro Mengoli v r. 1650 a vyřešil ho v r. 1734 Leonhard Euler:

$$B = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Problém se jmenuje podle Eulerova rodného města. Tam sídlil i matematický klan rodiny Bernoulliů, kteří problém neúspěšně řešili.

• *Řady.* Připomeneme základní definice z teorie (nekonečných) řad, aby předchozí vůbec dávalo smysl. *Řada* $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je vlastně posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, které je přiřazena posloupnost *částečných součtů*

$$(s_n) := (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \subset \mathbb{R}\ .$$

Pokud posloupnost (s_n) má limitu, řekneme, že řada *má součet*. Je-li tato limita vlastní ($\in \mathbb{R}$), pak řada *konverguje*, jinak (součet je $\pm\infty$ nebo neexistuje) *diverguje*. Součet řady se označuje stejným symbolem jako řada sama, takže také

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim\, s_n = \lim\,(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\ .$$

V úlohách si zopakujeme pár základních výsledků o řadách.

Úloha 1 (nutná podmínka konvergence) *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Úloha 2 *Když řada* $\sum a_n$ *má skoro všechny sčítance nezáporné, tedy když* $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \ge 0$, *pak* $\sum a_n$ *konverguje nebo má součet* $+\infty$.

Úloha 3 (harmonická řada) $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Úloha 4 $\sum \frac{1}{(n+1)n} = 1$.

Úloha 5 *Dokažte pomocí předchozí úlohy, že řada* $\sum 1/n^2$ *v Basilejském problému konverguje.*

Úloha 6 (geometrická řada) *Pro každé* $q \in (-1, 1)$ *je*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \; .$$

Úloha 7 (Leibnizovo kritérium) *Když* $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge 0$ *a* $\lim a_n = 0$, *pak řada* $\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ *konverguje.*

Úloha 8 *Odvoďte jednoduše:*

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \rightsquigarrow \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \; .$$

- *Trigonometrické řady.* Jsou to řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) \; ,$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ jsou *koeficienty* a $x \in \mathbb{R}$ je proměnná. Je to fakticky parametrický systém řad parametrizovaných proměnnou x. Naším cílem je odvodit vyjádření široké třídy funkcí $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ pomocí trigonometrických řad, čehož nakonec využijeme k odvození Eulerova řešení Basilejského problému.

Nechť $\mathcal{R}(-\pi, \pi)$ je množina všech funkcí $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu $[-\pi, \pi]$ Riemannův integrál. Pro $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme

$$\langle f,\, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} fg \in \mathbb{R}$$

(z teorie Riemannova integrálu plyne, že když $f, g \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$, pak i $fg \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$). Připomíná to skalární součin:

Úloha 9 *Dokažte, že*

$$\langle f,\, g\rangle = \langle g,\, f\rangle\,,\ \ \langle f,\, f\rangle \ge 0$$

a, pro $a, b \in \mathbb{R}$*,*

$$\langle af + bg,\, h\rangle = a\,\langle f,\, h\rangle + b\,\langle g,\, h\rangle\ \ .$$

Ale úplně to skalární součin není:

Úloha 10 *Ekvivalence*

$$\langle f,\, f\rangle = 0 \iff f \equiv 0$$

neplatí.

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-*periodická*, když pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Tvrzení 11 (ortogonalita sinů a kosinů) *Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$ je*

$$\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle = 0 \ .$$

Pro každá dvě celá čísla $m, n \geq 0$, kromě $m = n = 0$, je

$$\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle = \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle = \begin{cases} \pi & \ldots \quad m = n \quad a \\ 0 & \ldots \quad m \neq n \ . \end{cases}$$

Konečně

$$\langle \sin(0x), \sin(0x) \rangle = 0 \quad a \quad \langle \cos(0x), \cos(0x) \rangle = 2\pi \ .$$

Důkaz. Nechť $m, n \in \mathbb{N}_0$. Spočítáme hodnoty

$$S_{m,n} := \langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle, \ T_{m,n} := \langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle$$

a

$$U_{m,n} := \langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle \ .$$

Zřejmě $S_{0,0} = 0$, $T_{0,0} = 2\pi$ a $U_{0,0} = 0$. Nechť m nebo n není 0, třeba $m \neq 0$ (pro $n \neq 0$ je výpočet podobný). Integrace per partes pomocí $\sin(mx) = (-\cos(mx)/m)'$ a $\cos(mx) = (\sin(mx)/m)'$ dává

$$S_{m,n} = (n/m)T_{m,n}, \ T_{m,n} = (n/m)S_{m,n} \ \text{ a } \ U_{m,n} = -(n/m)U_{n,m} \ ,$$

protože první člen $[\ldots]_{-\pi}^{\pi}$ ve vzorci je vždy nulový, neboť $\ldots$ je 2π-periodická funkce. První dvě rovnice dohromady dávají

$$(1 - (n/m)^2)S_{m,n} = 0 = (1 - (n/m)^2)T_{m,n} \ .$$

Když $n \neq m$, pak odtud máme $S_{m,n} = T_{m,n} = 0$. Když $n = m$, pak víme, že $S_{m,m} = T_{m,m}$. Ale z identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ plyne, že též $S_{m,m}+T_{m,m} = \int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi$. Tedy $S_{m,m} = T_{m,m} = \pi$. Třetí hořejší rovnice pro $m = n$ dává $U_{m,m} = -U_{m,m}$ a tedy $U_{m,m} = 0$. Abychom vypočetli $U_{m,n}$ při $m \neq n$, vyjádříme $U_{n,m}$ integrací per partes opět pomocí $\cos(mx) = (\sin(mx)/m)'$:

$$U_{n,m} = -(n/m)U_{m,n} \ .$$

Dohromady $U_{m,n} = (n/m)^2 U_{m,n}$ a zas $U_{m,n} = 0$. Shrnuto: $S_{m,m} = T_{m,m} = \pi$ pro $m \in \mathbb{N}$, $S_{0,0} = 0$ a $T_{0,0} = 2\pi$, a všechny ostatní hodnoty $S_{m,n}$, $T_{m,n}$ a $U_{m,n}$ pro $m, n \in \mathbb{N}_0$ jsou rovny nule. □

• *Fourierova řada funkce.* Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ definujeme její *kosinové Fourierovy koeficienty*

$$a_n := \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx},\ \ n = 0,\,1,\,\ldots$$

a *sinové Fourierovy koeficienty*

$$b_n := \frac{\langle f(x), \sin(nx)\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{dx},\ \ n = 1,\,2,\,\ldots\ .$$

Fourierova řada funkce f $(\in \mathcal{R}(-\pi, \pi))$ je trigonometrická řada

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)\ ,$$

kde a_n a b_n jsou, po řadě, její kosinové a sinové Fourierovy koeficienty. Geometricky nahlíženo, pracujeme v nekonečně-rozměrném vektorovém prostoru se (skoro) skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, v němž jsou „souřadnými osami“ (prvky ortogonální báze) funkce

$$\{\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Fourierovy koeficienty dané funkce f jsou její souřadnice na těchto nekonečně mnoha souřadnými osách. V kontrastu s kartézskými souřadnicemi bodů v $\mathbb{R}^n$ se ale zdaleka ne každá funkce rovná součtu své Fourierovy řady. Podmínky postačující k tomu uvedeme za chvíli v Dirichletově větě a jejím důsledku.

- *Besselova nerovnost.*

Věta 12 (Besselova nerovnost) *Pro Fourierovy koeficienty a_n a b_n funkce $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$ platí nerovnost*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{\langle f,\, f\rangle}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \ .$$

Důkaz. Jako $s_n = s_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ označíme n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \big(a_k' \cos(kx) + b_k' \sin(kx)\big) \ , \end{aligned}$$

kde

$$a_k = \pi^{-1}\langle f,\, \cos(kx)\rangle,\ b_k = \pi^{-1}\langle f,\, \sin(kx)\rangle,\ k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\ ,$$

$a_0' = a_0/2$, $a_k' = a_k$ pro $k > 0$, $b_0' = 0$ a $b_k' = b_k$ pro $k > 0$. Díky linearitě (skoro) skalárního součinu $\langle\cdot, \cdot\rangle$, definici čísel a_k', b_k', a_k, b_k

a ortogonalitě funkcí $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$ máme

$$\begin{aligned}
\langle s_n,\, s_n\rangle &= \sum_{k=0}^{n}\Big((a'_k)^2\langle\cos(kx),\,\cos(kx)\rangle + (b'_k)^2\langle\sin(kx),\,\sin(kx)\rangle\Big)\\
&= \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)
\end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned}
\langle s_n,\, f\rangle &= \sum_{k=0}^{n}\Big(a'_k\langle\cos(kx),\, f\rangle + b'_k\langle\sin(kx),\, f\rangle\Big)\\
&= \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right)\ .
\end{aligned}$$

Na druhou stranu je

$$0 \le \langle f - s_n,\, f - s_n\rangle = \langle f,\, f\rangle - 2\langle s_n,\, f\rangle + \langle s_n,\, s_n\rangle\ ,$$

tudíž $2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle \le \langle f, f\rangle$. Odtud pro každé n je

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{2\langle s_n, f\rangle - \langle s_n, s_n\rangle}{\pi} \le \frac{\langle f, f\rangle}{\pi}\ .$$

Řada čtverců Fourierových koeficientů funkce f tedy konverguje a její součet je shora omezen uvedenou hodnotou. □

Úloha 13 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma) *S pomocí Besselovy nerovnosti dokažte, že pro každou funkci $f \in \mathcal{R}(-\pi,\pi)$ je*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{dx} = 0\ .$$

(Návod: viz úloha 1).

• *Po částech hladké funkce a Dirichletova věta.* Funkce

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \ ,$$

kde $a < b$ jsou reálná čísla, je *po částech hladká*, když existuje takové dělení

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b, \ k \in \mathbb{N} \ ,$$

intervalu $[a,b]$, že na každém intervalu (a_{i-1}, a_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, má f spojitou derivaci f', pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f(x) \ \text{ a } \ f'(a_i - 0) := \lim_{x \to a_i^-} f'(x)$$

a pro každé $i = 0, 1, \ldots, k-1$ existují vlastní jednostranné limity

$$f(a_i + 0) := \lim_{x \to a_i^+} f(x) \ \text{ a } \ f'(a_i + 0) := \lim_{x \to a_i^+} f'(x) \ .$$

Po částech hladká funkce tedy může být v několika bodech intervalu $[a,b]$ nespojitá, ale v bodech nespojitosti má vlastní jednostranné limity a má v nich definované jednostranné nesvislé tečny.

Úloha 14 *Je funkce* $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, *definovaná jako* $f(x) = (-x)^{1/3}$ *pro* $x \in [-1,0]$ *a* $f(x) = x^{1/3}$ *pro* $x \in [0,1]$, *po částech hladká?*

Úloha 15 *Je funkce signum* $\mathrm{sgn}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, *definovaná jako* $\mathrm{sgn}(x) = -1$ *pro* $x \in [-1,0)$, $\mathrm{sgn}(0) = 0$ *a* $\mathrm{sgn}(x) = 1$ *pro* $x \in (0,1]$, *po částech hladká?*

Věta 16 (Dirichletova) *Nechť*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

je taková 2π-periodická funkce, že její zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je po částech hladké. Pak její Fourierova řada $F_f(x)$ má pro každé $a \in \mathbb{R}$ součet

$$F_f(a) = \frac{f(a+0) + f(a-0)}{2} = \frac{\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to a^-} f(x)}{2} \ .$$

V každém bodu spojitosti $a \in \mathbb{R}$ funkce $f(x)$ tedy její Fourierova řada má součet rovný funkční hodnotě, $F_f(a) = f(a)$.

Důkaz. Příště. □

Řekneme, že funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je *hladká*, když má na intervalu (a, b) spojitou derivaci f' a v krajních bodech a a b mají $f(x)$ i $f'(x)$ vlastní jednostranné limity.

Důsledek 17 (o hladké funkci) *Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je 2π-periodická a spojitá funkce, jejíž zúžení na interval $[-\pi, \pi]$ je hladké. Potom pro každé $a \in \mathbb{R}$ je*

$$F_f(a) = f(a) \ .$$

Spojitá a hladká funkce se tedy rovná součtu své Fourierovy řady.

Důkaz. Plyne to z předchozí věty: v každém bodě $a \in \mathbb{R}$ je f spojitá podle předpokladu. □

• *Zpět k Basilejskému problému.* Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval symetrický vzhledem k počátku a $f\colon I \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *sudá* (resp. *lichá*), když pro každé $x \in I$ je $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Úloha 18 *Nechť $f \in \mathcal{R}(-\pi, \pi)$. Dokažte, že všechny sinové (resp. kosinové) Fourierovy koeficienty sudé (resp. liché) funkce*

f jsou nulové. Jak se zjednoduší kosinové (resp. sinové) Fourierovy koeficienty sudé (resp. liché) funkce?

Spočítáme Fourierovu řadu funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je na intervalu $[-\pi, \pi]$ definovaná jako $f(x) = x^2$ a pak je 2π-periodicky rozšířená na celé $\mathbb{R}$ (což je možné díky tomu, že $(-\pi)^2 = \pi^2$). Její sinové Fourierovy koeficienty jsou nulové podle předchozí úlohy. První (vlastně nultý) kosinový Fourierův koeficient je (podle této úlohy)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \,\mathrm{dx} = \frac{2\pi^2}{3}\,.$$

Další jsou ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \overbrace{\cos(nx)}^{(\sin(nx)/n)'} \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{2}{\pi n} \underbrace{\left[x^2 \sin(nx)\right]_0^\pi}_{0-0=0} - \frac{4}{\pi n} \int_0^\pi x \overbrace{\sin(nx)}^{(-\cos(nx)/n)'} \,\mathrm{dx} \\
&= \frac{4}{\pi n^2} \underbrace{\left[x \cos(nx)\right]_0^\pi}_{\pi(-1)^n} - \frac{4}{\pi n^2} \underbrace{\int_0^\pi \cos(nx) \,\mathrm{dx}}_{0-0=0} \\
&= (-1)^n \frac{4}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

Protože funkce f je spojitá a na $[-\pi, \pi]$ hladká, podle Důsledku 17 pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$f(a) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(na) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\cos(na)}{n^2}\,.$$

Pro $a = \pi$ dostáváme

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{tedy} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Úloha 19 *Funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $[-\pi,\pi)$ jako $f(x) = \pi - x$ a je 2π-periodicky rozšířená na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady.*

Úloha 20 *Jaký součet nekonečné řady dostaneme z předchozího rozvoje (pomocí Dirichletovy věty) pro $x = \frac{\pi}{2}$?*

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 1, 5, 13, 14 a 18. Deadline je (do konce dne) 29. 3. 2022.