MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 4 (11. 3. 2022). DŮKAZ Zvalg. ÚPLNÉ PROSTORY. BAIREOVA VĚTA

• *n-té komplexní odmocniny.* Nejprve si uvědomíme, že při hledání n-tých odmocnin z komplexních čísel se stačí omezit na liché n a na čísla s modulem 1, tedy ležící na komplexní jednotkové kružnici S.

Úloha 1. *Dokažte pomocí posledních dvou úloh uvedených v minulé přednášce, že když pro každé $u \in S$ a každé liché $n \in \mathbb{N}$ existuje $v \in S$, že $v^n = u$, pak platí následující věta.*

Věta 2 (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$). *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall\, u \in \mathbb{C}\; \forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, v \in \mathbb{C}:\;\; v^n = u\;.$$

Důkaz. Podle předchozí úlohy předpokládáme, že $u \in S$ a že $n \in \mathbb{N}$ je liché. Potřebujeme dokázat, že zobrazení

$$f(z) = z^n\colon S \to S\;,$$

které je zřejmě spojité, je na. Pro spor předpokládejme, že existuje číslo

$$w \in S \setminus f[S]\;,$$

to jest w nemá n-tou odmocninu. Vzhledem k lichosti n i $-w \in S \setminus f[S]$, protože vždy $f(-z) = -f(z)$. Body w a $-w$ vedeme přímku $\ell \subset \mathbb{C}$. Pak máme rozklad

$$\mathbb{C} = A \cup \ell \cup B\;,$$

kde A a B jsou otevřené poloroviny určené přímkou ℓ. Podle úlohy 3 níže to jsou disjunktní otevřené množiny. Podle úlohy 4 níže máme: $(A \cup B) \cap S = S \setminus \{w, -w\}$, $\{1, -1\} \subset f[S] \cap (A \cup B)$ a $|A \cap \{1, -1\}| = 1$. Množiny A a B tedy trhají množinu $f[S]$ a ta je nesouvislá. To je ale spor s větou 21 v minulé přednášce, protože $f[S]$ je obraz souvislé množiny S (její souvislost jsme zdůvodnili minule) spojitou funkcí f a je tedy souvislá. $\square$

Úloha 3. *Dokažte, že pro každou přímku $\ell \subset \mathbb{C}$ je $\mathbb{C} \setminus \ell$ sjednocení dvou disjunktních otevřených množin.*

Úloha 4. *Nechť $\ell \subset \mathbb{C}$ je přímka jdoucí počátkem, $\ell \cap S = \{w, -w\}$ a A a B jsou jí určené otevřené poloroviny. Dokažte, že $(A \cup B) \cap S = S \setminus \{w, -w\}$ a že pro každý bod $u \in S \setminus \{w, -w\}$ leží body u a $-u$ v různých polorovinách A a B.*

Přejdeme k druhému kroku důkazu ZVAlg: pomocí kompaktních podmnožin v $\mathbb{C}$ ZVAlg odvodíme z existence n-tých odmocnin. Připomínáme, že komplexní čísla $\mathbb{C}$ jsou MPem $(\mathbb{C}, |u - v|)$, který je izometrický Euklidovskému prostoru $(\mathbb{R}^2, e_2)$.

Úloha 5. *Dokažte, že pro každá reálná čísla $\alpha \le \alpha'$ a $\beta \le \beta'$ je obdélník*

$$R := \{a + bi \mid \alpha \le a \le \alpha' \wedge \beta \le b \le \beta'\}$$

kompaktní množina

Tvrzení 6 (redukce na n-té odmocniny). *Když $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny, pak platí* Zvalg *a každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.*

Důkaz. Nechť

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

je nekonstantní komplexní polynom, tedy $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{C}$ a $a_n \neq 0$. Funkce

$$f(z) := |p(z)|\colon \mathbb{C} \to [0, +\infty) \subset \mathbb{C}$$

je patrně spojitá. Dokážeme, že $f(u) = 0$ pro nějaké $u \in \mathbb{C}$. Pak i $p(u) = 0$ a u je kořen polynomu $p(z)$.

Nejprve dokážeme, že f nabývá na svém definičním oboru $\mathbb{C}$ nejmenší hodnotu $f(u)$, a pak, že nutně $f(u) = 0$. Nechť reálné číslo $K > 0$ je tak velké, že

$$\frac{K^n|a_n|}{2} > |a_0| \ \text{ a } \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| K^{j-n} < \frac{|a_n|}{2}\ .$$

Potom pro $z \in \mathbb{C}$ máme odhad, že

$$\begin{aligned} |z| > K \Rightarrow f(z) = |p(z)| \ &\geq\ |z|^n \left(|a_n| - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |z|^{j-n} \right) \\ &>\ |a_0| = |p(0)| = f(0)\ . \end{aligned}$$

Definujeme obdélník

$$R := \{a + bi \mid -K \leq a,\, b \leq K\} \subset \mathbb{C}\ .$$

Patrně $z \in \mathbb{C} \setminus R \Rightarrow |z| > K$. Podle věty 15 ve druhé přednášce (princip maxima) a úlohy 5 existuje $u \in R$, že $f(u) \leq f(v)$ pro každé $v \in R$. Protože ale $0 \in R$, je $f(u) \leq f(0)$ a podle hořejšího odhadu máme vlastně, že

$$\forall\, v \in \mathbb{C}:\ f(u) \leq f(v)$$

a f tak v u nabývá nejmenší hodnotu na svém celém definičním oboru $\mathbb{C}$.

Dokážeme, že $f(u) = 0$. Za tím účelem vyjádříme polynom $p(z)$ podle úlohy 7 ve tvaru

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j (z-u)^j ,$$

kde $b_j \in \mathbb{C}$ a $b_n = a_n$. V tomto vyjádření tedy $f(u) = |p(u)| = |b_0|$. Pro spor předpokládáme, že $f(u) = |b_0| > 0$. Nalezneme první nenulový nekonstantní koeficient v polynomu $p(z)$ a napíšeme $p(z)$ jako

$$p(z) = b_0 + b_k(z-u)^k + \underbrace{b_{k+1}(z-u)^{k+1} + \cdots + b_n(z-u)^n}_{q(z)} ,$$

kde $q \in \mathbb{C}[z]$, $k \in \mathbb{N}$, $b_0 \neq 0$ a $b_k \neq 0$. Použijeme předpoklad o n-tých odmocninách a vezmeme $\alpha \in \mathbb{C}$, že

$$\alpha^k = -\frac{b_0}{b_k} .$$

Je jasné, že pro $z \to u$ je $q(z) = o((z-u)^k)$, tedy že

$$\lim_{z \to u} q(z)(z-u)^{-k} = 0 .$$

Můžeme tedy vzít takové reálné $\delta \in (0,1)$, že pro

$$v := u + \delta\alpha$$

je

$$|q(v)| < \delta^k \cdot \frac{|b_0|}{2} .$$

Pak dostáváme spor, že $f(v) < f(u)$:

$$\begin{aligned} f(v) = |p(v)| &= && |b_0 + b_k\alpha^k\delta^k + q(v)| \\ &\overset{\text{def. } \alpha}{=} && |b_0(1-\delta^k) + q(v)| \\ &\overset{\Delta\text{-ová ner. a mult. } |\cdot|}{\leq} && |b_0|(1-\delta^k) + |q(v)| \\ &\overset{|q(v)| < \dots}{<} && |b_0|(1-\delta^k/2) \\ &\overset{\delta \in (0,\, 1)}{<} && |b_0| = f(u)\ . \end{aligned}$$

Tedy $f(u) = 0$ a $p(u) = 0$. $\square$

Úloha 7. *Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ a každá komplexní čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ a u existují taková komplexní čísla $b_0, b_1, \ldots, b_n$, že $b_n = a_n$ a platí rovnost polynomů*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j z^j = \sum_{j=0}^{n} b_j (z-u)^j\ .$$

• *Úplné množiny a úplné* MP*y.* MP (M, d) je *úplný*, je-li každá Cauchyova posloupnost $(a_n) \subset M$ konvergentní. *Cauchyova posloupnost* (a_n) splňuje, že

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0 :\ m,\, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m,\, a_n) < \varepsilon\ .$$

Množina $X \subset M$ je *úplná*, je-li podprostor (X, d) úplný.

Úloha 8. *Nechť (M, d) je* MP *a $X \subset Y \subset M$. Dokažte, že množina X je úplná v* MP*u (Y, d), právě když je úplná v* MP*u (M, d).*

Úloha 9. *Dokažte, že kartézský součin*

$$(M \times N,\, d \times e)$$

úplných MP*ů* (M, d) *a* (N, e) *je úplný* MP.

Základním příkladem úplného MPu je Euklidovský prostor

$$(\mathbb{R},\, e_1) = (\mathbb{R},\, |x - y|)\ ,$$

který je úplný díky tomu, že posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je konvergentní, právě když je Cauchyova. Podle úlohy 9 jsou všechny Euklidovské prostory $(\mathbb{R}^n, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, úplné. Mnoho úplných MPů sestrojíme pomocí následujícího jednoduchého výsledku.

Tvrzení 10 (úplnost uz. podprostoru). *V každém úplném* MP*u* (M, d) *je každá uzavřená množina* $X \subset M$ *úplná.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset X$ je Cauchyova posloupnost v uzavřené množině $X \subset M$ v úplném MPu (M, d). Tedy existuje $a := \lim a_n \in M$. Protože X je uzavřená množina, je $a \in X$ (uzavřené množiny jsou uzavřené i na limity). Takže množina X je úplná. □

Úloha 11. *Nechť* $X \subset M$ *je kompaktní množina v* MP*u* (M, d). *Dokažte, že* X *je úplná.*

Úloha 12. *Uveďte příklad úplné a nekompaktní množiny* $X \subset \mathbb{R}$ *v Euklidovském* MP*u* $(\mathbb{R}, e_1)$.

Úloha 13. *Rozhodněte, zda v* MP*u* (M, d) *platí následující implikace*

1. $X \subset M$ *je úplná množina* $\Rightarrow X$ *je uzavřená.*
2. $X \subset M$ *a* $Y \subset M$ *jsou úplné množiny* $\Rightarrow X \cup Y$ *je úplná množina.*

3. *$X \subset M$ a $Y \subset M$ jsou úplné množiny $\Rightarrow$ $X \cap Y$ je úplná množina.*

4. *$X \subset M$ je úplná množina $\Rightarrow$ X je omezená.*

5. *$X \subset M$ je konečná $\Rightarrow$ X je úplná.*

• *Baireova věta.* Hlavním výsledkem o úplných MPech je, vedle úplnosti konkrétních MPů, Baireova věta: úplný MP není spočetným sjednocením řídkých množin. Množina $X \subset M$ v MPu (M, d) je *řídká (v M)*, pokud

$$\forall\, a \in M\ \forall\, r > 0\ \exists\, b \in M\ \exists\, s > 0 :$$
$$B(b,\, s) \subset B(a,\, r) \wedge B(b,\, s) \cap X = \emptyset\ .$$

Každá koule v MPu (M, d) tedy obsahuje podkouli disjunktní s X.

Podobně množina $X \subset M$ v MPu (M, d) je *hustá (v M)*, pokud

$$\forall\, a \in M\ \forall\, r > 0 :\ B(a,\, r) \cap X \neq \emptyset\ .$$

Každá koule v MPu (M, d) tedy obsahuje prvek množiny X.

Úloha 14. *Nechť* (M, d) *je* MP *a $X \subset M$ je podmnožina. Dokažte ekvivalenci:*

$$X \text{ je hustá} \iff \forall\, a \in M\ \exists\, (a_n) \subset X :\ \lim a_n = a\ .$$

Tvrzení 15 (hustota a spojitost). *(M, d), (N, e) jsou* MP*y, $X \subset M$ je hustá v M a*

$$f,\, g \colon M \to N$$

jsou spojitá zobrazení s $f \,|\, X = g \,|\, X$ (zúžení obou zobrazení na množinu X se shodují). Pak $f = g$.

Důkaz. Nechť $a \in M$ je libovolný bod. Protože X je hustá, podle předešlé úlohy existuje taková posloupnost $(a_n) \subset X$, že $\lim a_n = a$. Pomocí Heineho definice spojitosti funkce a předpokladu o f a g máme, že

$$f(a) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(a).$$

Tedy $f = g$. □

Úloha 16. *Dokažte, že konečné sjednocení řídkých množin je řídká množina. Ukažte na příkladu, že to obecně neplatí pro spočetná sjednocení.*

Úloha 17. *Dokažte, že průnik dvou hustých množin, z nichž jedna je otevřená, je hustá množina. Ukažte na příkladu, že to obecně neplatí, vynecháme-li předpoklad otevřenosti.*

Pro $a \in M$ a reálné $r > 0$ *uzavřenou koulí* $\overline{B}(a, r)$ v MPu (M, d) rozumíme množinu

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in M \mid d(a, x) \leq r\} .$$

Úloha 18. *Každá uzavřená koule* $\overline{B}(a, r)$ *je uzavřená množina a že pro každé* $a \in M$ *a kladné* $r, s \in \mathbb{R}$ *s* $r < s$ *je*

$$\overline{B}(a, r) \subset B(a, s) .$$

Věta 19 (Baireova). *Nechť* (M, d) *je úplný* MP *a*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n .$$

Pak některá množina X_n *není řídká. Jinak řečeno, žádný úplný metrický prostor není spočetným sjednocením řídkých množin.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že všechny množiny X_n jsou řídké. Sestrojíme posloupnost $(\overline{B_n})$ do sebe vnořených uzavřených koulí, jejichž středy konvergují k bodu $a \in M$ ležícímu mimo všechny X_n, což je pochopitelně spor.

Nechť $B(b, 1) \subset M$ je libovolná koule. Protože X_1 je řídká množina, existuje $a_1 \in M$ a $s_1 > 0$, že $B(a_1, s_1) \subset B(b, 1)$ a $B(a_1, s_1) \cap X_1 = \emptyset$. Položíme

$$\overline{B}(a_1,\, r_1) := \overline{B}(a_1,\, \min(s_1/2,\, 1/2))\ .$$

Pak $\overline{B}(a_1, r_1) \subset B(a_1, s_1)$, tedy $\overline{B}(a_1, r_1) \cap X_1 = \emptyset$, a $r_1 \leq 1/2$.

Nechť jsou už definované takové uzavřené koule

$$\overline{B}(a_1,\, r_1) \supset \overline{B}(a_2,\, r_2) \supset \cdots \supset \overline{B}(a_n,\, r_n)\ ,$$

že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ je $\overline{B}(a_i, r_i) \cap X_i = \emptyset$ a $r_i \leq 2^{-i}$. Protože X_{n+1} je řídká množina, existuje $a_{n+1} \in M$ a $s_{n+1} > 0$, že $B(a_{n+1}, s_{n+1}) \subset B(a_n, r_n)$ a $B(a_{n+1}, s_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$. Položíme

$$\overline{B}(a_{n+1},\, r_{n+1}) := \overline{B}(a_{n+1},\, \min(s_{n+1}/2,\, 2^{-n-1}))\ .$$

Pak

$$\overline{B}(a_{n+1},\, r_{n+1}) \subset \overline{B}(a_n,\, r_n) \cap B(a_{n+1},\, s_{n+1})\ ,$$

tedy i $\overline{B}(a_{n+1}, s_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$, a $r_{n+1} \leq 2^{-n-1}$.

Posloupnost $(a_n) \subset M$ středů výše definovaných uzavřených koulí je Cauchyova, protože

$$m \geq n \Rightarrow \overline{B}(a_m,\, r_m) \subset \overline{B}(a_n,\, r_n) \ \text{ a tedy } \ d(a_m,\, a_n) \leq r_n \leq \frac{1}{2^n}\ .$$

Použijeme úplnost MPu (M, d) a vezmeme limitu

$$a := \lim a_n \in M\ .$$

Protože $m \geq n \Rightarrow a_m \in \overline{B}(a_n, r_n)$ a podle úlohy 18 je každá $\overline{B}(a_n, r_n)$ uzavřená množina, leží limita a v každé uzavřené kouli $\overline{B}(a_n, r_n)$ a tedy v žádné z množin X_n, což je spor. $\square$

Baireova věta má řadu aplikací, z nichž si teď uvedeme jen jednu. Bod $a \in M$ v MPu (M, d) je *izolovaný*, pokud

$$\exists\, r > 0 :\ B(a, r) = \{a\}\ .$$

Úloha 20. *Dokažte, že v* MP*u* (M, d) *platí:*

$$a \in M \text{ není izolovaný bod } \iff \{a\} \subset M \text{ je řídká množina}\ .$$

Důsledek 21 (o úplném MPu). *Každý úplný* MP (M, d) *neobsahující izolované body, je nespočetný.*

Důkaz. Pro spor nechť je množina M spočetná. Pak ale

$$M = \bigcup_{a \in M} \{a\}$$

je spočetné sjednocení a protože každá množina $\{a\}$ je podle předchozí úlohy řídká, dostali jsme spor s Baireovou větou. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 7, 11, 13, 16 a 20. Deadline je (do konce dne) 22. 3. 2022.