MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 3 (4. 3. 2022). KOMPAKTNOST A SPOJITOST. HEINE–BORELOVA VĚTA. SOUVISLÉ MNOŽINY. ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

• *Kompaktnost a spojitost.* Nejprve ověříte, že restrikce spojité funkce na podprostor je spojitá funkce.

Úloha 1. *Nechť* (M,d) *a* (N,e) *jsou* MP*y,* $X \subset M$ *je neprázdná množina a* $f\colon M \to N$ *je spojitá funkce. Pak i zúžení*

$$f \,|\, X\colon X \to N,\ X \ni a \mapsto f(a) \in N\ ,$$

definované na podprostoru (X,d) *je spojitá funkce.*

V minulé přednášce jsme se setkali se dvěma ekvivalentními verzemi spojitosti funkce: (i) klasickou v ε-δ tvaru a (ii) Heineho založenou na limitách posloupností. Nyní zavedeme třetí ekvivalentní definici spojitosti, tak zvanou *topologickou spojitost*.

Tvrzení 2 (topologická spojitost). *Nechť* $f\colon M \to N$ *je zobrazení mezi* MP*y* (M,d) *a* (N,e)*. Potom (*OM *je zkratka pro „otevřená množina“)*

$$f \text{ je spojité} \iff$$
$$\forall\, \mathrm{OM}\ A \subset N:\ f^{-1}[A] := \{x \in M \mid f(x) \in A\} \subset M \text{ je OM}\ .$$

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť je f spojité v ε-δ smyslu, $A \subset N$ je otevřená množina a $a \in f^{-1}[A]$. Tedy $f(a) \in A$ a existuje $\varepsilon > 0$, že $B(f(a),\varepsilon) \subset A$. Tedy existuje $\delta > 0$, že

$$f[B(a,\,\delta)] \subset B(f(a),\,\varepsilon) \subset A\ .$$

Tedy $B(a,\delta) \subset f^{-1}[A]$ a $f^{-1}[A]$ je otevřená množina.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť je f spojitá v topologickém smyslu, $a \in M$ a $\varepsilon > 0$. Protože koule $B(f(a),\varepsilon) \subset N$ je otevřená množina, je $f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$ otevřená množina. Protože $a \in f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$, existuje $\delta > 0$, že $B(a,\delta) \subset f^{-1}[B(f(a),\varepsilon)]$. To ale znamená, že

$$f[B(a,\,\delta)] \subset B(f(a),\,\varepsilon)\;.$$

Takže f je spojitá v ε-δ smyslu. $\square$

Úloha 3. *Dokažte tuto ekvivalenci s uzavřenými množinami místo otevřených.*

Topologickou definici spojitosti zobecníme na podprostory.

Úloha 4. *Nechť* (M,d) *a* (N,e) *jsou* MP*y*, $X \subset M$ *a* $f\colon X \to N$. *Potom (*OM *je opět „otevřená množina“)*

$$f \textit{ je spojité zobrazení, definované na podprostoru } (X,d) \iff$$
$$\iff \forall\,\mathrm{OM}\ A \subset N\ \exists\,\mathrm{OM}\ B \subset M:\ f^{-1}[A] = X \cap B\;.$$

Dokážeme, že spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

Tvrzení 5 (spojitý obraz kompaktu). *Nechť* (M,d) *a* (N,e) *jsou* MP*y*, $X \subset M$ *je kompaktní množina a*

$$f\colon X \to N$$

je spojitá funkce. Pak obraz $f[X] \subset N$ *je kompaktní množina.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset f[X]$ je libovolná posloupnost. Vezmeme posloupnost $(b_n) \subset X$ s $f(b_n) = a_n$ a vybereme v ní konvergentní podposloupnost (b_{m_n}) s $\lim b_{m_n} = b \in X$. Z Heineho definice spojitosti máme, že

$$\lim a_{m_n} = \lim f(b_{m_n}) = f(b) \in f[X] \, .$$

Dostali jsme konvergentní podposloupnost posloupnosti (a_n) s limitou v $f[X]$. Tedy $f[X]$ je kompaktní. $\square$

Úloha 6. *Na příkladu ukažte, že vzor kompaktní množiny spojitou funkcí nemusí být kompaktní množina.*

Jiná užitečná vlastnost kompaktních množin je následující.

Tvrzení 7 (spojitost inverzu). *Nechť*

$$f\colon X \to N$$

je prosté spojité zobrazení z kompaktní množiny $X \subset M$ v MP*u* (M, d) *do* MP*u* (N, e)*. Potom inverzní zobrazení*

$$f^{-1}\colon f[X] \to X$$

je spojité.

Důkaz. Použijeme verzi topologické definice spojitosti v úloze 3. Potřebujeme dokázat, že pro každou množinu $A \subset X$, která je uzavřená v podprostoru (X, d), je její vzor $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A] \subset f[X]$ zobrazením f^{-1} uzavřená množina v podprostoru $(f[X], e)$. Podle jedné z úloh v minulé přednášce víme, že A je kompaktní (je to uzavřená množina v kompaktním prostoru). Podle předešlého tvrzení víme, že $f[A]$ je kompaktní množina v podprostoru $(f[X], e)$. Tedy, podle tvrzení v minulé přednášce, je $f[A]$ uzavřená v tomto podprostoru. $\square$

• *Homeomorfismy* MP*ů*. Zobrazení $f\colon M \to N$ mezi MPy (M,d) a (N,e) je jejich *homeomorfismus*, je-li f bijekce a jsou-li f a f^{-1} spojitá zobrazení. Existuje-li mezi (M,d) a (N,e) homeomorfismus, jsou tyto prostory *homeomorfní*.

Úloha 8. *Popište homeomorfismus mezi Euklidovskými prostory* $(0,1) \subset \mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$.

Úloha 9. *Nechť* $I := [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ *je Euklidovský prostor, stejně jako jednotková kružnice*

$$S := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Je zobrazení $I \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in S$ *homeomorfismem obou prostorů?*

Úloha 10. *Nechť* (M,d) *a* (N,e) *jsou homeomorfní* MP*y. Je pravda, že* M *je kompaktní* $\iff$ N *je kompaktní a že* M *je omezený* $\iff$ N *je omezený?*

• *Heine–Borelova věta.* Tato věta podává charakterizaci kompaktních množin v MPech pomocí otevřených množin. Řekneme, že podmnožina $A \subset M$ MPu (M,d) je *topologicky kompaktní*, pokud pro každý systém otevřených množin $\{X_i \mid i \in I\}$ v M platí:

$$\bigcup_{i\in I} X_i \supset A \Rightarrow \exists \text{ konečná množina } J \subset I :\ \bigcup_{i \in J} X_i \supset A\,.$$

Řekneme: „každé otevřené pokrytí množiny A má konečné podpokrytí“. Dokážeme, že tato definice kompaktnosti je ekvivalentní původní definici.

Věta 11 (Heine–Borelova). *Podmnožina $A \subset M$ metrického prostoru (M, d) je kompaktní, právě když je topologicky kompaktní.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme vzít $A = M$ (úloha 12).

Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť (M, d) je kompaktní MP a

$$M = \bigcup_{i \in I} X_i$$

je jeho otevřené pokrytí, takže každá X_i je otevřená. V systému

$$\{X_i \mid i \in I\}$$

nalezneme konečné podpokrytí. Nejprve dokážeme, že

$$\forall\, \delta > 0\; \exists \text{ konečná množina } S_\delta \subset M :\; \bigcup_{a \in S_\delta} B(a,\, \delta) = M\ .$$

Kdyby to tak nebylo, pak by existovalo $\delta_0 > 0$ a posloupnost $(a_n) \subset M$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) \geq \delta_0$. Ve sporu s předpokládanou kompaktností množiny M tato posloupnost nemá konvergentní podposloupnost. Skutečně, kdyby (negujeme hořejší tvrzení o δ a S_δ) existovalo $\delta_0 > 0$, že pro každou konečnou množinu $S \subset M$ je

$$M \setminus \textstyle\bigcup_{a \in S} B(a,\, \delta_0) \neq \emptyset\ ,$$

pak — máme-li již definované body a_1, a_2, $\ldots$, a_n s $d(a_i, a_j) \geq \delta_0$ pro každé $1 \leq i < j \leq n$ — vezmeme $a_{n+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \delta_0)$ a a_{n+1} má od každého bodu a_1, a_2, $\ldots$, a_n vzdálenost alespoň δ_0. Tak definujeme celou posloupnost (a_n).

Pro spor nyní předpokládejme, že hořejší otevřené pokrytí množiny M množinami X_i nemá konečné podpokrytí. Tvrdíme, že odtud vyplývá, že (konečné množiny S_δ jsou definované výše)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, b_n \in S_{1/n}\; \forall\, i \in I:\;\; B(b_n, 1/n) \not\subset X_i\ .$$

Kdyby to tak nebylo, pak (negujeme předchozí tvrzení) by existovalo $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $b \in S_{1/n_0}$ existuje $i_b \in I$, že $B(b, 1/n_0) \subset X_{i_b}$. Pak ale, protože $M = \bigcup_{b \in S_{1/n_0}} B(b, 1/n_0)$, dávají indexy $J = \{i_b \mid b \in S_{1/n_0}\} \subset I$ ve sporu s předpokladem konečné podpokrytí množiny M.

Na samostatném řádku uvedené tvrzení o n a b_n tak platí a lze vzít posloupnost $(b_n) \subset M$. Podle předpokladu má konvergentní podposloupnost (b_{k_n}) s $b := \lim b_{k_n} \in M$. Protože X_i pokrývají M, existuje $j \in I$, že $b \in X_j$. Díky otevřenosti X_j existuje $r > 0$, že $B(b, r) \subset X_j$. Vezmeme tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $1/k_n < r/2$ a $d(b, b_{k_n}) < r/2$. Pro každé $x \in B(b_{k_n}, 1/k_n)$ pak podle Δ-ové nerovnosti máme, že $d(x, b) \leq d(x, b_{k_n}) + d(b_{k_n}, b) < r/2 + r/2 = r$. Tedy

$$B(b_{k_n},\, 1/k_n) \subset B(b,\, r) \subset X_j\ ,$$

ve sporu s hořejší vlastností bodů b_n. Předpoklad, že konečné podpokrytí neexistuje, vede ke sporu. Proto pokrytí M množinami X_i, $i \in I$, má konečné podpokrytí.

Dokážeme implikaci $\Leftarrow$, což je lehčí. Předpokládáme, že každé otevřené pokrytí množiny M má konečné podpokrytí a odvodíme z toho, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost. Nejprve ukážeme, že předpoklad

$$\forall\, b \in M\ \exists\, r_b > 0 :\ M_b := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in B(b,\, r_b)\} \text{ je konečná}$$

vede ke sporu. Z pokrytí $M = \bigcup_{b \in M} B(b, r_b)$ bychom totiž vybrali konečné podpokrytí dané konečnou množinou $N \subset M$ a nahlédli, že existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin \bigcup_{b \in N} B(b, r_b)$, protože množina indexů $\bigcup_{b \in N} M_b$ je konečná (je to konečné sjednocení konečných množin). To je ale spor, protože $\bigcup_{b \in N} B(b, r_b) = M$. Předpoklad tedy neplatí a naopak (negujeme ho) je pravda, že

$$\exists\, b \in M\ \forall\, r > 0:\ \ M_r := \{n \in N \mid a_n \in B(b, r)\}\ \text{ je nekonečná}\ .$$

Teď už lehce z (a_n) vybereme konvergentní podposloupnost (a_{k_n}) s limitou b. Nechť už jsme definovali indexy $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, že $d(b, a_{k_i}) < 1/i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Množina indexů $M_{1/(n+1)}$ je nekonečná, takže můžeme zvolit takové $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, že $k_{n+1} > k_n$ a $k_{n+1} \in M_{1/(n+1)}$. Pak i $d(b, a_{k_{n+1}}) < 1/(n+1)$. Takto je definována podposloupnost (a_{k_n}) konvergující k b. □

Úloha 12. *Proč můžeme v předchozím důkazu vzít $A = M$?*

• *Souvislé množiny a* MP*y.* Podmnožina $X \subset M$ v MPu (M, d) je *obojetná* (anglicky *clopen*), je-li současně otevřená i uzavřená, jako jsou například množiny $\emptyset$ a M. Prostor M je *souvislý*, nemá-li netriviální (různou od $\emptyset$ a M) obojetnou podmnožinu. Jinak, má-li M obojetnou podmnožinu $X \subset M$ s $X \ne \emptyset, M$, je M *nesouvislý*. Podmnožina $X \subset M$ je *souvislá*, resp. *nesouvislá*, je-li podprostor (X, d) *souvislý*, resp. *nesouvislý*.

Úloha 13. *Které konečné množiny $X \subset \mathbb{R}$ v Euklidovském prostoru $\mathbb{R}$ jsou souvislé?*

Úloha 14. *Je množina $X \subset \mathbb{R}^2$ v Euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$, daná jako*

$$X := (\{0\} \times [-1,\, 1]) \cup \{(t,\, \sin(1/t)) \mid 0 < t \le 1\}\ ,$$

souvislá?

Nechť (M, d) je MP a $X, A, B \subset M$. Řekneme, že množiny A a B *trhají množinu* X, pokud A a B jsou otevřené a

$$(X \subset A \cup B) \wedge (X \cap A \ne \emptyset \ne X \cap B) \wedge (X \cap A \cap B = \emptyset)\ .$$

Úloha 15. *Dokažte, že $X \subset M$ je nesouvislá množina v* MP*u* (M, d)*, právě když existují množiny $A, B \subset M$, které ji trhají.*

Úloha 16. *Nechť* (M, d) *je* MP *a $A, B \subset M$ jsou takové souvislé množiny, že $A \cap B \neq \emptyset$. Dokažte, že pak je množina $A \cup B$ souvislá.*

• *Základní věta algebry (Zvalg).* Dokážeme ji pomocí kompaktních a souvislých množin v MPu $\mathbb{C}$.

Věta 17 (Zvalg). *Každý nekonstantní komplexní polynom má kořen, tedy*

$$(n \geq 1) \wedge (a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{C}) \wedge (a_n \neq 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{C} :\ \textstyle\sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0\ .$$

K tomu ale musíme ještě odvodit několik výsledků o souvislých množinách. Z pohledu kompaktních množin jsme už připraveni: MP $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, |u - v|)$ je vlastně Euklidovský prostor $(\mathbb{R}^2, e_2)$ a $X \subset \mathbb{C}$ je kompaktní, právě když X je uzavřená a omezená.

Reálnou osu $\mathbb{R}$ bereme jako obsaženou v $\mathbb{C}$ a nejprve dokážeme, že každý interval $[a, b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ je souvislá množina v MPu $\mathbb{C}$.

Věta 18 (souvislost intervalů). *Každý interval $[a, b] \subset \mathbb{C}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$, je souvislá množina.*

Důkaz. Nechť pro spor $A, B \subset \mathbb{C}$ jsou otevřené množiny, které trhají interval $[a, b]$ (úloha 15). Lze předpokládat, že $a < b$ a že $a \in A$ a $b \in B$ (úloha 19). Uvážíme číslo

$$c := \sup(\{x \in [a,\, b] \mid x \in A\}) \in [a,\, b]\ .$$

Pak $c \in A \cup B$. Pokud $c \in A$, je $c < b$. Z otevřenosti A plyne, že každé c' s $c < c' < b$ a dostatečné blízké k c leží v A. To je ale spor s tím, že c je horní mez množiny $A \cap [a, b]$. Pokud $c \in B$, je $a < c$. Z otevřenosti B plyne, že každé c' s $a < c' < c$ a dostatečné blízké k c leží v B, tedy mimo A. To je ale spor s tím, že c je nejmenší horní mez množiny $A \cap [a, b]$. $\square$

Úloha 19. *Proč lze v důkazu předpokládat, že $a \in A$ a $b \in B$?*

Úloha 20. *Dokažte ekvivalenci*

$$\textit{množina } X \subset \mathbb{R} \textit{ je souvislá} \iff X \textit{ je interval}\,.$$

Stejně jako kompaktní množiny se i souvislé zachovávají spojitými zobrazeními.

Věta 21 (souvislost a spojitost). *Nechť $f\colon X \to N$ je spojité zobrazení ze souvislé množiny $X \subset M$ v* MP*u* (M, d) *do* MP*u* (N, e). *Potom*

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subset N$$

je souvislá množina.

Důkaz. Z nesouvislosti $f[X]$ odvodíme nesouvislost X. Nechť otevřené množiny $A, B \subset N$ trhají množinu $f[X]$. Podle úlohy 4 existují otevřené množiny $A', B' \subset M$, že

$$f^{-1}[A] = X \cap A' \ \text{ a } \ f^{-1}[B] = X \cap B'\,.$$

Lehce se vidí, že množiny A' a B' trhají množinu X a ta je tedy nesouvislá. $\square$

Teď už snadno dokážeme, že *komplexní jednotková kružnice*

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

je souvislá množina. Nejjednodušší (ve skutečnosti úplně ne) je vzít spojitou funkci $f(t) = \cos t + i \sin t \colon I := [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. Pak

$$S = f[I]$$

a S je souvislá díky oběma předchozím větám. Fakticky to není úplně nejjednodušší vzhledem k tomu, že použité transcendentní funkce sin a cos mají definice (a odvození potřebných vlastností), které nejsou vůbec jednoduché. Můžeme se jim vyhnout tak, že místo f vezmeme dvě spojité funkce $f^+, f^- \colon I := [-1, 1] \to \mathbb{C}$ definované jako

$$f^+(t) := t + i\sqrt{1 - t^2} \text{ a } f^-(t) := t - i\sqrt{1 - t^2}\,.$$

Pak

$$S = f^+[I] \cup f^-[I]$$

a S je souvislá díky oběma předchozím větám a úloze 16.

Teď už se můžeme pustit do prvního ze dvou kroků důkazu ZVAlg. Dokážeme v něm, že $\mathbb{C}$ obsahuje všechny n-té odmocniny pro $n \in \mathbb{N}$; opět bez použití sinu a kosinu. Dva speciální případy tohoto faktu vám nechám jako úlohy.

Úloha 22. *Dokažte, že pro každé nezáporné $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nezáporné $y \in \mathbb{R}$, že $y^n = x$.*

Úloha 23 (druhá odmocnina v $\mathbb{C}$). $\forall\, a + bi \in \mathbb{C}$ *máme pro vhodnou volbu znamének v reálných číslech*

$$c := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}}{\sqrt{2}} \ \text{ a } \ d := \pm\frac{\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a}}{\sqrt{2}}\,,$$

že $(c + di)^2 = a + bi$. Jaká je přesně tato volba znamének? Jak byste tyto vzorce odvodili? (Ověřit jejich správnost je lehké.)

Věta 24 (n-té odmocniny v $\mathbb{C}$). *Komplexní čísla obsahují všechny n-té odmocniny, tedy*

$$\forall\, u \in \mathbb{C}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, v \in \mathbb{C}:\ v^n = u\ .$$

Tuto větu ale dokážeme až příště, kdy také důkaz Zvalg dokončíme druhým krokem založeným na kompaktních množinách.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 4, 9, 13, 14 a 23. Deadline je (do konce dne) 15. 3. 2022