MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 2 (25. 2.2022). OSTROWSKIHO VĚTA. KOMPAKTNÍ MNOŽINY A MPy

• *Ostrowskiho věta.* Na libovolném tělese F máme *triviální normu*. Je to funkce $\|\cdot\|$ s $\|0_F\| = 0$ a $\|x\| = 1$ pro $x \neq 0_F$.

Úloha 1. *Dokažte, že triviální norma je norma.*

Z obvyklé absolutní hodnoty $|\cdot|$ na $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ dostaneme umocněním spoustu dalších norem

Úloha 2. *Dokažte, že pro $c > 0$ je $|\cdot|^c$ norma (na $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$), právě když $c \leq 1$. Tuto normu nazveme modifikovanou absolutní hodnotou.*

Pro $\alpha \in \mathbb{Q}$ a prvočíslo p je *kanonická p-adická norma* $\|\cdot\|_p$ definovaná jako

$$\|\alpha\|_p := p^{-\mathrm{ord}_p(\alpha)}\ ,$$

to jest v obecné p-adické normě $|\cdot|_p$ klademe $c := 1/p$.

Úloha 3. *Nechť $M := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \cup \{\infty\}$ a $\|\cdot\|_\infty := |\cdot|$ (obyčejná absolutní hodnota). Dokažte pro každé nenulové číslo $\alpha \in \mathbb{Q}$* součinovou formuli

$$\prod_{p \in M} \|\alpha\|_p = 1\ .$$

Úloha 4. *Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální norma na tělese $\mathbb{Q}$. Dokažte, že $\exists\, n \in \mathbb{N}:\ n \geq 2 \wedge \|n\| \neq 1$.*

Úloha 5. *Dokažte, že pro každá dvě nesoudělná čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ existují čísla $c, d \in \mathbb{Z}$, že*

$$ac + db = 1$$

Věta 6 (A. Ostrowski, 1916). *Nechť $\|\cdot\|$ je norma na tělese racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Nastává právě jedna ze tří následujících možností.*

1. *Je to triviální norma.*
2. *Existuje reálné $c \in (0, 1]$, že $\|x\| = |x|^c$.*
3. *Existuje reálné $c \in (0, 1)$ a prvočíslo p, že $\|x\| = |x|_p = c^{\mathrm{ord}_p(x)}$.*

Modifikovaná absolutní hodnota a p-adické normy jsou tedy jediné netriviální normy na tělese racionálních čísel.

Důkaz. Nechť $\|\cdot\|$ je netriviální, není tvaru 1. Pak díky úloze 4 existuje $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, že $\|n\| \neq 1$. Máme dva případy.

1. *Existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| > 1$.* Jako n_0 označíme nejmenší takové n. Patrně $n_0 \geq 2$ a

$$1 \leq m < n_0 \Rightarrow \|m\| \leq 1 \,. \tag{1}$$

Existuje jednoznačné reálné číslo $c > 0$, že

$$\|n_0\| = n_0^c \,. \tag{2}$$

Každé $n \in \mathbb{N}$ lze při základu n_0 zapsat jako

$$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s, \text{ kde}$$
$$a_i,\ s \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq a_i < n_0 \text{ a } a_s \neq 0 \,.$$

Pro $n_0 = 10$ se jedná o obvyklý zápis v desítkové soustavě. Takže

$$\begin{aligned}
\|n\| &= \|a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \cdots + a_s n_0^s\| \\
&\overset{\Delta\text{-ner. a multipl. } \|\cdot\|}{\leq} \textstyle\sum_{j=0}^{s} \|a_j\| \cdot \|n_0\|^j \\
&\overset{\text{rov. (1) a (2)}}{\leq} \textstyle\sum_{j=0}^{s} n_0^{jc} \;\leq\; n_0^{sc} \sum_{i=0}^{\infty} (1/n_0^c)^i \\
&\overset{n_0^s \leq n}{\leq} n^c C, \quad \text{kde } C := \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (1/n_0^c)^i \ .
\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ \|n\| \leq C n^c \ . \tag{3}$$

Tato nerovnost ve skutečnosti platí dokonce s $C = 1$. Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativita normy a nerovnost (3) dávají

$$\|n\|^m = \|n^m\| \leq C\,(n^m)^c = C\,(n^c)^m \ .$$

Vezmeme-li zde m-tou odmocninu, dostaneme $\|n\| \leq C^{1/m} n^c$. Pro $m \to \infty$ máme $C^{1/m} \to 1$. Takže skutečně

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ \|n\| \leq n^c \ . \tag{4}$$

Podobně odvodíme opačnou nerovnost $\|n\| \geq n^c$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ hořejší zápis čísla n při základu n_0 dává

$$n_0^{s+1} > n \geq n_0^s \ .$$

Podle Δ-ové nerovnosti máme

$$\|n_0\|^{s+1} = \|n_0^{s+1}\| \leq \|n\| + \|n_0^{s+1} - n\| \ .$$

Tedy

$$\begin{aligned}
\|n\| \quad &\geq \quad \|n_0\|^{s+1} - \|n_0^{s+1} - n\| \overset{\text{rov. (2) a (4)}}{\geq} n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n)^c \\
&\overset{n \geq n_0^s}{\geq} \quad n_0^{(s+1)c} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^c = n_0^{(s+1)c}\left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{n_0}\right)^c\right) \\
&\overset{n_0^{s+1} > n}{\geq} \quad n^c C', \quad \text{kde} \quad C' := 1 - \left(1 - \tfrac{1}{n_0}\right)^c > 0 \; .
\end{aligned}$$

Trik s m-tou odmocninou opět dává

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \; \|n\| \geq n^c$$

a tedy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : \; \|n\| = n^c \; .$$

Z multiplikativity normy dostáváme $\|x\| = |x|^c$ pro každý zlomek $x \in \mathbb{Q}$. Podle úlohy 2 je $c \in (0, 1]$. Takže platí případ 2 Ostrowskiho věty.

2. *Zbývá případ, kdy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|n\| \leq 1$ a existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\|n\| < 1$.* Nechť n_0 je nejmenší takové n, opět $n_0 \geq 2$. Tvrdíme, že $n_0 = p$ je prvočíslo. Kdyby totiž n_0 mělo rozklad $n_0 = n_1 n_2$ s $n_i \in \mathbb{Z}$ a $1 < n_1, n_2 < n_0$, dostali bychom spor

$$1 > \|n_0\| = \|n_1 n_2\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1 \cdot 1 = 1 \; ,$$

kde jsme použili multiplikativitu normy a to, že $\|m\| = 1$ pro každé $m \in \mathbb{N}$ s $1 \leq m < n_0$. Ukážeme, že každé jiné prvočíslo $q \neq p$ má normu $\|q\| = 1$. Pro spor nechť $q \neq p$ je další prvočíslo s normou $\|q\| < 1$. Vezmeme tak velké $m \in \mathbb{N}$, že $\|p\|^m, \|q\|^m < \frac{1}{2}$. Podle výsledku z elementární teorie čísel v úloze 5 existují celá čísla a a b, že $aq^m + bp^m = 1$. Znormování této rovnosti dává spor:

$$1 = \|1\| = \|aq^m + bp^m\| \le \|a\|\cdot\|q\|^m + \|b\|\cdot\|p\|^m < 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1\ .$$

Zde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost, multiplikativitu normy a to, že nyní $\|a\| \le 1$ pro každé $a \in \mathbb{Z}$.

Tedy $\|q\| = 1$ pro každé prvočíslo q různé od p. Odtud pomocí multiplikativity normy a rozkladu nenulového zlomku x na součin mocnin prvočísel dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \prod_{q=2,3,5,\ldots} q^{\mathrm{ord}_q(x)} \right\| = \prod_{q=2,3,5,\ldots} \|q\|^{\mathrm{ord}_q(x)} = \|p\|^{\mathrm{ord}_p(x)} \\ &= c^{\mathrm{ord}_p(x)},\ \text{kde } c := \|p\| \in (0,1)\ . \end{aligned}$$

Též $\|0\| = c^{\mathrm{ord}_p(0)} = c^{\infty} = 0$. Dostali jsme případ 3 Ostrowskiho věty. □

Předchozí důkaz je převzatý z knihy

N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, Springer-Verlag, New York, 1984.

Ta obsahuje mnoho zajímavého o p-adické normě $\|\cdot\|_p$ a odvozené p-adické analýze. Bohužel se už s tímto tématem musíme rozloučit, podívejte se ale alespoň na následující dvě úlohy.

Úloha 7. *Uvažme metrický prostor* $(\mathbb{Q}, |x-y|_p)$ *s p-adickou metrikou. Dokažte, že v něm pro* $a_n \in \mathbb{Q}$ *řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje} \iff |a_n|_p \to 0 \ \textit{pro}\ n \to \infty\ .$$

Úloha 8. *Pro která prvočísla p konvergují řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} 10^n$$

v metrickém prostoru $(\mathbb{Q}, |x-y|_p)$*?*

• *Kompaktnost množin v MPech.* Nejprve zavedeme pojem limity posloupnosti v MPu. Nechť (M,d) je MP, $(a_n) \subset M$ je posloupnost bodů v něm a $a \in M$ je bod. Řekneme, že (a_n) má *limitu* a *(v* (M,d)*)*, pokud

$$\forall \varepsilon\ \exists n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow d(a_n,\, a) < \varepsilon\ .$$

Zde (a dále) $\varepsilon > 0$ je reálné číslo a $n_0, n \in \mathbb{N}$. Píšeme $\lim a_n = a$ či $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Má-li posloupnost (a_n) limitu, řekneme, že je *konvergentní*, jinak je *divergentní*.

Nechť (M,d) je MP a $X \subset M$, např. $X = M$. Řekneme, že množina X je *kompaktní*, pokud

$$\forall (a_n) \subset X\ \exists (a_{m_n})\ \exists a \in X :\ \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = a\ .$$

Slovy: každá posloupnost bodů množiny X má konvergentní podposloupnost s limitou v X. MP (M,d) *je kompaktní*, když množina M je kompaktní.

Bolzano–Weierstrassova věta říká, že na reálné ose, tj. v MPu $(\mathbb{R}, |x-y|)$, je každý uzavřený a omezený interval $X = [a,b]$ kompaktní množina. Uvedeme si pár příkladů kompaktních množin a kompaktní MPů.

Úloha 9. *V každém* MP*u je každá konečná množina kompaktní.*

Úloha 10. *Je reálná osa (s metrikou $|x-y|$) kompaktní* MP*?*

Úloha 11. *Které další intervaly na reálné ose kromě $[a,b]$ jsou kompaktní množiny?*

Úloha 12. *Nechť $X = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník v rovině, to jest v Euklidovském prostoru $(\mathbb{R}^2, e_2)$. Dokažte, že X je kompaktní množina.*

Úloha 13. *Nechť (M,d) je* MP*, $A, B \subset M$ a pišme krátce „je k.“ místo „je kompaktní množina“. Rozhodněte, zda platí implikace*

$$\begin{aligned} &A \text{ i } B \text{ je k.} \Rightarrow A \cup B \text{ je k.} \\ &A \text{ i } B \text{ je k.} \Rightarrow A \cap B \text{ je k.} \\ &A \subset B \text{ a } B \text{ je k.} \Rightarrow A \text{ je k.} \\ &A \text{ i } B \text{ je k.} \Rightarrow A \setminus B \text{ je k.} \end{aligned}$$

• *Rozšíříme princip maxima z reálné osy na obecný* MP. Nejprve ale musíme zavést spojitá zobrazení mezi MPy. (M,d) a (N,e) buďte MPy a $f\colon M \to N$ buď zobrazení mezi nimi. Je *spojité v bodě $a \in M$*, pokud

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x \in M:\ d(x,a) < \delta \Rightarrow e(f(x), f(a)) < \varepsilon\ .$$

Zde $\delta > 0$ je reálné. *Zobrazení f je spojité*, je-li spojité v každém bodu $a \in M$.

Úloha 14. *Nechť $f\colon M \to N$ je zobrazení mezi* MP*y a $a \in M$ je bod. Dokažte Heineho definici spojitosti f v a, tedy dokažte ekvivalenci*

$$\begin{aligned} &f \text{ je spojité v } a \iff \\ &\iff \forall (a_n) \subset M:\ \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\ . \end{aligned}$$

Věta 15 (princip maxima). *Nechť* (M, d) *je* MP,

$$f\colon M \to \mathbb{R}$$

je spojitá funkce z M *do reálné osy a* $X \subset M$ *je neprázdná kompaktní množina. Pak*

$$\exists\, a,\, b \in X\ \forall\, x \in X\colon f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ .$$

Funkce f *tedy na množině* X *nabývá svou nejmenší hodnotu* $f(a)$ *a největší hodnotu* $f(b)$*.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že obraz $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Kdyby množina $f[X]$ nebyla omezená shora, našli bychom posloupnost $(a_n) \subset X$ s $\lim f(a_n) = +\infty$, tedy takovou, že $\forall\, c\ \exists\, n_0 :\ n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) > c$. Podle předpokladu má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in X$. Podle spojitosti f v a a úlohy 14 je $\lim f(a_{m_n}) = f(a) \in \mathbb{R}$. To ale je spor, protože $\lim f(a_{m_n}) = +\infty$. Podobně se dokáže omezenost $f[X]$ zdola.

Můžeme tedy definovat reálná čísla $A := \inf(f[X])$ a $B := \sup(f[X])$. Podle definice infima existuje posloupnost $(a_n) \subset X$, že $\lim f(a_n) = A$. Podle předpokladu má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in X$. Podle spojitosti f v a a úlohy 14 je $\lim f(a_{m_n}) = f(a)$. Současně ovšem, protože podposloupnost zachovává limitu, $\lim f(a_{m_n}) = A$. Tedy $f(a) = A$ a pro každé $x \in X$ je

$$f(a) = A \leq f(x)\ ,$$

protože A je infimum množiny $f[X]$. Podobně nalezneme $b \in X$, že $f(b) = B$, a podobně $f(b) = B \geq f(x)$ pro každé $x \in X$. $\square$

• *Součin* MPů. Pro MPy (M, d) a (N, e) definujeme jejich *součin* $(M \times N, d \times e)$ tak, že $M \times N$ je kartézský součin množin M a N a metrika $d \times e$ na něm je dána jako

$$(d \times e)((a_1,\, a_2),\, (b_1,\, b_2)) := \sqrt{d(a_1,\, b_1)^2 + e(a_2,\, b_2)^2}\ .$$

Úloha 16. *Dokažte, že součin dvou* MP*ů je* MP.

Úloha 17. *Dokažte, že součin dvou Euklidovských* MP*ů*

$$(\mathbb{R}^m,\, e_m) \;\; a \;\; (\mathbb{R}^n,\, e_n)$$

je (až na formalitu ve značení) Euklidovský MP

$$(\mathbb{R}^{m+n},\, e_{m+n})\ .$$

Co je ta „formalita“?

• *Charakterizace kompaktních množin v Euklidovských* MP*ech.* Koule $B(a, r)$ v MPech jsme definovali minule. Množina $X \subset M$ v MPu (M, d) je *otevřená*, pokud

$$\forall\, a \in X\ \exists\, r:\ B(a, r) \subset X\ .$$

Zde $r > 0$ je reálné číslo, poloměr koule $B(a, r)$. X je *uzavřená*, pokud $M \setminus X$ je otevřená. X je *omezená*, pokud

$$\exists\, a \in M\ \exists\, r:\ X \subset B(a,\, r)\ .$$

Diametr (*průměr*) množiny X je s $V := \{d(a,\, b) \mid a,\, b \in X\} \subset [0, +\infty)$ definovaný jako

$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup(V) & \ldots\ \text{množina } V \text{ je shora omezená a} \\ +\infty & \ldots\ \text{množina } V \text{ je shora neomezená}\ . \end{cases}$$

Úloha 18. *Dokažte, že množina X je omezená, právě když* $\mathrm{diam}(X) < +\infty$.

Úloha 19. *Dokažte, že každá neomezená množina X obsahuje takovou posloupnost $(a_n) \subset X$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) > 1$.*

Ve dvou následujících úlohách si připomeneme základní vlastnosti otevřených a uzavřených množin v MPu.

Úloha 20. *Nechť (M, d) je* MP. *Pak platí následující.*

1. *Množiny $\emptyset$ a M jsou otevřené i uzavřené.*
2. *Konečný průnik otevřených podmnožin množiny M je otevřená množina a konečné sjednocení uzavřených podmnožin množiny M je uzavřená množina.*
3. *Libovolné sjednocení otevřených podmnožin množiny M je otevřená množina a libovolný průnik uzavřených podmnožin množiny M je uzavřená množina.*

Úloha 21. *Nechť (M, d) je* MP *a $X \subset M$. Potom*

$$\begin{aligned} &\textit{množina } X \textit{ je uzavřená} \iff \\ &\iff \forall\, (a_n) \subset X\ \forall\, a \in M:\ \lim a_n = a \Rightarrow a \in X\ . \end{aligned}$$

Věta 22 (komp. ⇒ uz. a om., součin). *Platí následující.*

1. *Když $X \subset M$ je kompaktní množina v* MP*u (M, d), pak X je uzavřená a omezená. Opačná implikace obecně neplatí podle úlohy 24.*
2. *Jsou-li (M, d) a (N, e) dva kompaktní* MP*y, pak i jejich součin $(M \times N, d \times e)$ je kompaktní* MP.

Důkaz. 1. Když X není uzavřená, pak podle úlohy 21 existuje konvergentní posloupnost $(a_n) \subset X$, že $\lim a_n = a \in M \setminus X$. Tato posloupnost ovšem nemá konvergentní podposloupnost s limitou v X, protože každá podposloupnost má limitu a. Když X není omezená, snadno sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset X$, že $m < n \Rightarrow d(a_m, a_n) > 1$ (úloha 19). Tato posloupnost zřejmě nemá konvergentní podposloupnost.

2. Nechť $(a_n) = ((a_{n,1}, a_{n,2}))$ je posloupnost v součinovém MPu. Vybereme z ní podposloupnost (b_n) tak, že $(b_{n,1})$ má v (M, d) limitu $b \in M$. Z (b_n) vybereme podposloupnost (c_n) tak, že $(c_{n,2})$ má v (N, e) limitu $c \in N$. Není těžké vidět, že (c_n) je podposloupnost posloupnosti (a_n) a že v součinovém MPu má limitu

$$\lim c_n = (b,\, c) \in M \times N\ .$$

$\square$

Úloha 23. *Nechť* (M, d) *je kompaktní* MP *a* $X \subset M$ *je uzavřená množina. Dokažte, že* X *je kompaktní množina.*

Úloha 24. *Nechť* M *je nekonečná množina a metrika* d *na ní je dána jako* $d(a, b) = 1$ *pro* $a \neq b$ *a* $d(a, a) = 0$. *Ukažte, že* (M, d) *je* MP, *který je omezený a uzavřený, ale ne kompaktní.*

Věta 25 (komp. mn. v $\mathbb{R}^n$). *V každém Euklidovském* MP*u* $(\mathbb{R}^n, e_n)$ *je množina* $X \subset \mathbb{R}^n$ *kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Podle první části předchozí věty stačí dokázat, že každá omezená a uzavřená množina $X \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní. Z její omezenosti plyne, že pro nějaké reálné číslo $a > 0$ je

$$X \subset K := [-a,\, a]^n = [-a,\, a] \times [-a,\, a] \times \cdots \times [-a,\, a] \subset \mathbb{R}^n\ .$$

Euklidovský MP (K, e_n) je kompaktní díky Bolzano–Weierstrassově větě, části 2 předchozí věty a úloze 17. Patrně je X uzavřená i v (K, e_n) (úloha 26), takže podle úlohy 23 je X kompaktní v (K, e_n) a tedy i v $(\mathbb{R}^n, e_n)$ (úloha 27). $\square$

Úloha 26. *Nechť* (M, d) *je* MP, $A \subset B \subset M$ *a* A *je uzavřená množina v* $(M, d) \Rightarrow A$ *je uzavřená i v podprostoru* (B, d).

Úloha 27. *Nechť* (M, d) *je* MP *a* $A \subset B \subset M$. *Pak* A *je kompaktní v* $(M, d) \iff A$ *je kompaktní v podprostoru* (B, d).

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Úlohy za dom. cv. jsou: 5, 8, 13, 19 a 24. Deadline je (do konce dne) 8. 3. 2022.