MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 13 (20. 5. 2022). NĚKTERÉ KONKRÉTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE: ALGEBRAICKÉ A 1. ŘÁDU — SEPAROVANÉ A LINEÁRNÍ

Důkaz poslední věty z předchozí přednášky, Arzelà–Ascoliovy, nakonec nebudu uvádět pro nedostatek času.

• *Newtonův zákon síly.* Diferenciální rovnice (DR), to jest relace mezi hodnotami derivací hledaných funkcí, představují základní nástroj v matematických modelech ve fyzice, technice, biologii, ekonomii atd. Základním příkladem je *Newtonův zákon síly*

$$mx'' = F\ ,$$

kde $x = x(t) \in \mathbb{R}$ je poloha v čase t částice o hmotnosti m vystavené působení síly F (zde uvažujeme jen jednoduchý jednorozměrný případ). Síla může být obecně funkcí času, polohy částice a její rychlosti: $F = F(t, x, x')$. Nejjednodušší situace je pro konstantní F, či obecněji pro F závisející jen na t — pak $x(t) = \int\int F$. To nastává třeba při působení tíhového pole Země. To se nemění v čase a nezávisí na poloze částice (pro malá měřítka) a už vůbec ne na její rychlosti, což jsou ale všechno idealizace (hlavně nezávislost na x). *Rovnice volného pádu* pak je

$$mx'' = -mg\ ,$$

kde g je konstanta tíhového zrychlení. Všechna její řešení jsou právě a jen funkce

$$X := \{x(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2 \mid c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}\}\ ,$$

kde c_1 a c_2 jsou libovolné konstanty. Ty vyjadřují skutečnost, že pohyb padající částice je určen jednoznačně teprve zadáním její polohy $x(t_0)$ a rychlosti $x'(t_0)$ v nějakém časovém okamžiku t_0.

Úloha 1 *Dokažte, že řešením rovnice volného pádu jsou právě funkce v X. Můžeme pád částice určit jednoznačně i polohou $x(t_0)$ a rychlostí $x'(t_1)$ v různých časových okamžicích t_0 a t_1?*

• *Jako druhý příklad* DR si uvedeme *rovnici radioaktivního rozpadu*

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -kR\ .$$

Popisuje vývoj množství $R = R(t)$ rozpadajícího se radioaktivního materiálu v čase t, kde k je materiálová konstanta. Je jasné, že každá funkce

$$R = R(t) = c\exp(-kt)\ ,$$

kde c je konstanta, je řešením této rovnice.

DR dělíme na *obyčejné diferenciální rovnice* (ODR, anglickou zkratkou ODE), v nichž vystupují funkce pouze jedné proměnné, a na *parciální diferenciální rovnice* (PDR, anglicky PDE), které obsahují funkce více proměnných a jejich parciální derivace. Obě předchozí rovnice jsou ODR. V minulé i této přednášce se omezujeme jen na ODR.

• *Než tedy* PDR *úplně opustíme,* uvedeme si pro zajímavost jejich tři důležité reprezentanty: *Laplaceovu rovnici* (neboli *rovnici potenciálu*)

$$u = u(x,\, y)\ :\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ,$$

rovnici difuze (neboli *rovnici vedení tepla*)

$$u = u(x,\, t)\ :\quad \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

a *vlnovou rovnici*

$$u = u(x,\, t)\ :\quad a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ ,$$

kde α a a jsou konstanty. Fyzikální význam těchto rovnic naznačují už jejich názvy.

- *Obecný tvar* ODR pro neznámou funkci $y = y(x)$ je $(n \in \mathbb{N})$

$$F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0\ ,$$

kde F je nějaká funkce $n+2$ proměnných. Nejvyššímu řádu n derivace vyskytujícímu se v rovnici říkáme ***řád rovnice***. Hořejší rovnice pro volný pád je tedy (obyčejná diferenciální) rovnice druhého řádu, kdežto rovnice radioaktivního rozpadu je prvního řádu.

Diferenciální rovnice tvaru $(n \in \mathbb{N})$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)\ ,$$

kde $a_i(x)$ a $b(x)$ jsou zadané funkce a $y = y(x)$ je neznámá funkce, je *lineární diferenciální rovnice (řádu n a s pravou stranou $b(x)$).* Pokud je $b(x)$ identicky nulová, mluvíme o *homogenní lineární diferenciální rovnici.*

Diferenciální rovnice, které nejsou tohoto tvaru (a závisejí tedy na některých proměnných pro neznámou funkci a její derivace nelineárně), jsou *nelineární diferenciální rovnice*. Například *rovnice kyvadla*

$$\theta'' + (g/l)\sin\theta = 0\ ,$$

která popisuje pohyb kyvadla délky l kývajícího se v homogenním tíhovém poli (g je konstanta tíhového zrychlení) — úhel $\theta = \theta(t)$ je odchylka kyvadla od svislice v čase t — je nelineární. Pro malé výchylky θ platí $\sin\theta \approx \theta$ a můžeme řešit lineární aproximaci rovnice kyvadla $\theta'' + (g/l)\theta = 0$, což už je lineární ODR. Rovnice volného pádu i rovnice radioaktivního rozpadu jsou lineární.

Úloha 2 *Zkuste uhádnout nějaké řešení rovnice*

$$\theta'' + (g/l)\theta = 0\ .$$

• *Algebraické diferenciální rovnice.* Diferenciální rovnice (zde opět $n \in \mathbb{N}$)

$$F(x,\,y,\,y',\,y'',\,\dots,\,y^{(n)}) = 0\ ,$$

v nichž F je polynom v $n+2$ proměnných, jsou *algebraické diferenciální rovnice* (anglickou zkratkou ADE). Protože přednášející se o tyto rovnice zajímal a zajímá, uvedeme si teď pro zajímavost (a bez důkazů) tři výsledky o ADE. Pro první z nich si připomeneme, že *(Eulerova gama) funkce* $\Gamma(z)$ je pro komplexní z s $\mathrm{re}(z) > 0$ definována integrálem

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{dt}\ .$$

Úloha 3 *Ukažte, že pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *s* $\mathrm{re}(z) > 0$ *tento integrál konverguje. Integrand je třeba prověřit u* 0 *i u* $+\infty$*.*

Úloha 4 *Spočtěte, že* $\Gamma(1) = 1$ *a dokažte, že* $\Gamma(z)$ *splňuje funkcionální rovnici*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\ .$$

Návod: integrace per partes.

Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ tedy $\Gamma(n+1) = n!$ a vidíme, že funkce gama rozšiřuje faktoriál. Pomocí hořejší funkcionální rovnice se dokáže následující věta.

Věta 5 (O. Hölder, 1887) *Funkce gama nesplňuje žádnou netriviální* ADE, *pro žádný nenulový komplexní polynom F s $n+2$ proměnnými.*

Pro další výsledek o ADE definujeme v jednotkovém komplexním kruhu $|z| < 1$ funkce

$$\vartheta(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2} \ \text{ a } \ P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n} \ .$$

Úloha 6 *Dokažte, že koeficienty v poslední mocninné řadě jsou přirozená čísla, takže $p(n) \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, a že $p(n)$ je počet* rozkladů čísla n, *počet vyjádření čísla n jako součtu přirozených čísel. Součty odlišující se jen pořadím sčítanců nepovažujeme za různé.*

Věta 7 (pozitivně o ADE) *Obě funkce $\vartheta(z)$ i $P(z)$ splňují netriviální (a dosti složité)* ADE.

Konečně třetí výsledek o ADE uvedeme konstatováním, že diferenciální rovnice lze bez potíží uvažovat kromě oboru funkcí i v oboru formálních mocninných řad, které mohou mít nulový poloměr konvergence a nedefinují tak žádnou funkci.

Úloha 8 *Uvažujme formální mocninnou řadu*

$$M(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + 24x^4 + \dots \ .$$

Odvoďte netriviální ADE, *fakticky lineární* DR *prvního řádu, kterou $M(x)$ splňuje.*

Nyní definujeme jinou formální mocninnou řadu

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}\ ,$$

kde pro $k = 0$ položíme sčítanec rovný 1. Dále pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k)x^n := \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}\ .$$

Je asi jasné, že vždy $S(n,k) \in \mathbb{N}_0$. Těmto číslům se říká *Stirlingova čísla (druhého druhu).*

Úloha 9 *Dokažte, že pro $k, n \in \mathbb{N}$ je číslo $S(n,k)$ právě počet množinových rozkladů (disjunktních sjednocení s neprázdnými množinami) n-prvkové množiny na k bloků. Návod: koeficient u x^n v rozvoji racionální funkce*

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

počítá slova u délky n nad abecedou $[k] := \{1, 2, \dots, k\}$ s těmi vlastnostmi, že (i) každé $i \in [k]$ se v u vyskytuje a (ii) pro každé $i, j \in [k]$ s $i < j$ první výskyt i v u předchází první výskyt j.

Hořejší koeficienty B_n jsou tedy vyjádřeny pomocí Stirlingových čísel jako

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,\ k)$$

a B_n je počet všech množinových rozkladů n-prvkové množiny. B_n jsou takzvaná *Bellova čísla.*

Věta 10 (M. Klazar, 2003) *Formální mocninná řada*

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nx^n\ ,$$

to jest obyčejná generující funkce Bellových čísel, nesplňuje žádnou netriviální ADE.

Důkaz běží podobně jako u Hölderovy věty — dokáže se, že žádná netriviální ADE není slučitelná s následující funkcionální rovnicí pro $B(x)$.

Úloha 11 *Pomocí hořejší definice mocninné řady* $B(x)$ *dokažte, že*

$$B(x)=1+\frac{x}{1-x}\cdot B(x/(1-x))\ .$$

Úloha 12 *Odvoďte netriviální* ADE *pro exponenciální generující funkci Bellových čísel, jež je*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}=e^{e^x-1}\ .$$

• DR *se separovanými proměnnými* je obecně nelineární diferenciální rovnice prvního řádu tvaru

$$y(a)=b\wedge y'=f(x)\cdot g(y) \tag{SEP}$$

pro neznámou funkci $y=y(x)$ s předepsanou hodnotou $y(a)=b$ ($a,b\in\mathbb{R}$), kde $f(x)$, resp. $g(y)$, je funkce definovaná a spojitá na nějakém otevřeném intervalu $I\ni a$, resp. $J\ni b$, a g je na J nenulová. Tento typ rovnice nyní lokálně jednoznačně vyřešíme funkcí $y\colon I'\to J$, pro nějaký otevřený interval I' splňující $a\in$

$I' \subset I$. Uvidíme, že řešení je vyjádřené (ale jen implicitně) pomocí neurčitých integrálů funkcí $1/g$ a f.

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a ten přepíšeme pomocí pevně zvolené funkce $G := \int 1/g$ (funkce primitivní na intervalu J k funkci $1/g$) jako

$$\forall\, x \in I' :\ G(y(x))' = f(x)\ .$$

Máme tedy rovnici

$$\forall\, x \in I' :\ G(y(x)) = F(x) + c\ ,$$

kde $F := \int f$ je předem pevně zvolená funkce, primitivní na intervalu I k funkci f, a c je (integrační) konstanta. Řešení $y(x)$ původní rovnice (SEP) je tak dáno jako implicitní funkce vztahem

$$\forall\, x \in I' :\ \underbrace{G(y(x)) = F(x) + c}_{(*)},\ \ \text{kde}\ \ G = \int \frac{1}{g},\ F = \int f$$

a konstanta c je určená vztahem $G(b) = F(a) + c$. Z věty o implicitní funkci plyne, že existuje otevřený interval I' s $a \in I' \subset I$ a jednoznačně určená funkce $y\colon I' \to J$, že $y(a) = b$ a na I' platí vztah $(*)$. Na I' tedy máme jednoznačné řešení rovnice (SEP).

Úloha 13 *Vysvětlete použití věty o implicitní funkci v této situaci (proč jsou například splněny její předpoklady). Proč je ale řešení rovnice* (SEP) *lokálně jednoznačné, když primitivní funkce G a F nejsou zdaleka určené jednoznačně?*

Úloha 14 *Neplyne lokální jednoznačnost řešení rovnice* (SEP) *z Picardovy věty?*

• *Lineární* DR *1. řádu.* Měli bychom umět vyřešit lineární diferenciální rovnici 1. řádu, a proto jí zakončíme naše přednášky. Je to rovnice tvaru ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$)

$$y(x_0) = y_0 \wedge y' + a(x)y = b(x) \ , \tag{LIN}$$

kde $y = y(x)$ je neznámá funkce a funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou dané, definované a spojité na nějakém otevřeném intervalu $I \ni x_0$.

Úloha 15 *Neplyne lokální jednoznačnost a existence řešení rovnice* (LIN) *z Picardovy věty?*

No, plyne, takže už stačí rovnici jen vyřešit (to jest vyjádřit její řešení z koeficientů a a b pomocí známých funkcí a známých operací). Nejprve nalezneme takovou funkci $c = c(x)$, tzv. *integrační faktor*, že

$$c \cdot (y' + ay) = (cy)' \ .$$

Pak $cy' + acy = cy' + c'y$ a c musí splňovat rovnici $ac = c'$, čili $(\log c)' = a$. Funkce $c = e^A$, kde $A = \int a$, má tedy požadovanou vlastnost. Výchozí lineární rovnici vynásobíme integračním faktorem a dostaneme

$$(cy)' = \underbrace{c(y' + ay) = cb}_{c \cdot \text{(LIN)}} \ .$$

Takže $(cy)' = cb$ a $cy = D + c_0$, kde $D = \int cb$ a c_0 je integrační konstanta. Máme tedy řešení $y = c^{-1}(D + c_0)$. Shrnuto,

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)} b(x)\ \mathrm{dx} + c_0\right), \ \text{ kde } \ A(x) = \int a(x)\ \mathrm{dx} \ .$$

Všimněte si, že $y(x)$ je definovaná na celém I (definičním oboru funkcí a a b) a že každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$ odpovídá přesně jedna hodnota integrační konstanty c_0, pro níž je splněna.

Úloha 16 *Vyřešte rovnici se separovanými proměnnými*

$$v \cdot v' = -\frac{gR^2}{(R+x)^2} \ .$$

Zde $R \approx 6378\,\mathrm{km}$ *je poloměr Země,* $g \approx 9.81\,\mathrm{ms}^{-2}$ *je tíhové zrychlení,* $x > 0$ *je výška (v metrech) částice, jež byla vymrštěna ze zemského povrchu rychlostí* $v = v_0$*, a* $v = v(x)$ *je její rychlost ve výšce* x*. Vypočítejte odtud* únikovou rychlost *(též* druhou kosmickou rychlost*), tedy rychlost* v_0*, pro níž už částice nikdy nedopadne zpět na Zemi.*

Úloha 17 *Uvažujte částici o hmotnosti* m*, která z klidu padá vlivem konstantní tíže a na kterou kromě tíže působí i odpor prostředí a to tak, že síla odporu je úměrná rychlosti částice. Sestavte lineární* DR *1. řádu pro tento problém a vyřešte ji. Vypočítejte mezní rychlost, kterou částice (téměř) dosáhne.*

DĚKUJI^2 ZA POZORNOST!

Ale ještě pár (dvanáct) otázek ke zkoušce.

1. Definujte metrický prostor a sférickou metriku. Dokažte, že hemisféra není plochá — v. 13 v 1. př.

2. Dokažte Ostrowskiho větu — v. 6 ve 2. př.

3. Dokažte Heine–Borelovu větu — v. 11 ve 3. př.

4. Dokažte existenci n-tých odmocnin v $\mathbb{C}$ — v. 2 ve 4. př.
5. Dokažte Besselovu nerovnost — v. 12 v 5. př.
6. Spočítejte, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
— viz 5. př.
7. Dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce — v. 6 v 7. př.
8. Dokažte případ $d = 2$ nebo případ $d = 3$ Pólyovy věty — v. 8 v 8. př.
9. Dokažte, že $\rho \neq 0$ — v. 6 v 10. př.
10. Dokažte Cauchy–Goursatovu větu pro obdélníky — v. 12 v 10. př.
11. Dokažte Picardovu větu — v. 6 ve 12. př.
12. Vyřešte diferenciální rovnici $y' + ay = b$ — viz 13. př.