MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 12 (13. 5. 2022). EXISTENČNÍ VĚTY O ŘEŠENÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC: PICARDOVA A PEANOVA.

• *Jedním ze sedmi Problémů tisíciletí* vyhlášených Clayovým matematickým institutem v r. 2000 — vyřešení každého z nich se cení na 10^6 \$ — je problém, zda existuje hladké řešení Navier–Stokesových (parciálních diferenciálních) rovnic, které popisují proudění tekutiny v prostoru.

• *Banachova věta o pevném bodu.* Pro Picardovu větu o diferenciálních rovnicích budeme potřebovat dva výsledky o úplných metrických prostorech, kterými proto začneme. Prvním z nich je známý výsledek o existenci pevného bodu *kontrahujícího zobrazení*

$$f\colon M \to M$$

metrického prostoru (M, d) do sebe. Je to každé takové zobrazení, že pro nějakou konstantu $c \in (0, 1)$ pro každé $a, b \in M$ je

$$d(f(a),\, f(b)) \le c \cdot d(a,\, b)$$

— f zkracuje vzdálenosti nějakým faktorem menším než 100%.

Úloha 1 *Dokažte, že každé kontrahující zobrazení metrického prostoru do sebe je spojité.*

Věta 2 (Banachova o pevném bodu) *Každé zobrazení*

$$f\colon M \to M$$

úplného MP*u do sebe, které je kontrahující, má právě jeden pevný bod — takový bod $a \in M$, že*

$$f(a) = a\ .$$

Dále platí, že každá posloupnost $(a_n) \subset M$ iterací funkce f, kde bod $a_1 \in M$ je libovolný a pro $n > 1$ je $a_n = f(a_{n-1})$, konverguje k tomuto pevnému bodu a.

Důkaz. Ukážeme, že libovolná posloupnost $(a_n) \subset M$ iterací funkce f je Cauchyova. Hned to je vidět z odhadu, že pro každé dva indexy $m > n$ platí, že (c je konstanta z definice kontrahujícího zobrazení)

$$\begin{aligned} d(a_m,\, a_n) &\overset{\Delta\text{-ová nerovnost}}{\leq} \sum_{i=n}^{m-1} d(\underbrace{a_{i+1}}_{f(a_i)},\, a_i) \\ &\overset{f \text{ je kontr., def. } a_i}{\leq} \sum_{i=n}^{m-1} c^{i-1} \cdot d(a_2,\, a_1) \\ &\overset{\text{přidání} \geq 0 \text{ členů}}{\leq} d(a_2,\, a_1) \sum_{i=n}^{\infty} c^{i-1} \\ &\overset{\text{geom. řada}}{=} \frac{d(a_2,\, a_1) \cdot c^{n-1}}{1-c} \to 0, \quad n \to \infty\ . \end{aligned}$$

Protože (M, d) je úplný MP, můžeme definovat

$$a := \lim_{n \to \infty} a_n \in M\ .$$

Pak díky spojitosti funkce f (úloha 1) je

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$$

a a je pevný bod f. Jeho jednoznačnost dokážete v následující úloze 3. $\square$

Úloha 3 *Dokažte, že pevný bod kontrahujícího zobrazení libovolného* MP*u do sebe je jediný.*

Úloha 4 *Dokažte Banachovu větu o pevném bodu za slabšího předpokladu, že jen nějaká n-tá iterace*

$$f^{[n]} := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ krát } f} \colon M \to M$$

zobrazení f MP*u M do sebe je kontrahující.*

• *Úplnost jistého prostoru funkcí.* Potřebujeme také následující úplný MP.

Tvrzení 5 (úplnost spojitých funkcí) *Pro každá dvě reálná čísla $a < b$ je metrický prostor*

$$(C[a,\, b],\, d)\ ,$$

spojitých funkci $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a s maximovou metrikou

$$d(f,\, g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|\ ,$$

úplný.

Důkaz. Nechť $(f_n) \subset C[a, b]$ je posloupnost funkcí, která je Cauchyova v maximové metrice. Pro každé $x \in [a, b]$ je $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ Cauchyova posloupnost reálných čísel (v euklidovské metrice). Proto lze položit

$$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

a máme bodovou konvergenci

$$f_n \to f \ (\text{na } [a,\, b])\ .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme n_0, že $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) = \max_{a \leq x \leq b} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2$. Díky bodové konvergenci funkcí f_n k funkci f existuje pro každé $x \in [a, b]$ index $n(x) \in \mathbb{N}$, že $n(x) \geq n_0$ a $|f(x) - f_{n(x)}(x)| < \varepsilon/2$. Pak ale

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in [a,\, b]\; \forall\, n \geq n_0 :\; |f(x) - f_n(x)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_{n(x)}(x)| + |f_{n(x)}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

a máme tak vlastně stejnoměrnou konvergenci

$$f_n \rightrightarrows f \text{ (na } [a,\, b]) \, .$$

V přednášce 7 jsme ale ve větě 6 dokázali, že pak je limitní funkce f spojitá. Posloupnost (f_n) má v MPu $(C[a, b], d)$ limitu f. $\square$

• *Picardova věta* je následující věta o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu s explicitní první derivací.

Věta 6 (Picardova) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pro níž existuje konstanta $M > 0$, že pro každá tři čísla $u, v, w \in \mathbb{R}$ je*

$$|F(u,\, v) - F(u,\, w)| \leq M \cdot |v - w| \, .$$

Potom existuje $\delta > 0$ a jednoznačně určená funkce

$$f\colon [a - \delta,\, a + \delta] \to \mathbb{R} \, ,$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall\, x \in [a - \delta,\, a + \delta] :\; f'(x) = F(x,\, f(x)) \qquad (1)$$

(poznámka o derivacích v krajních bodech intervalů).

Důkaz. Nechť $I := [a - \delta,\, a + \delta]$, pro nějaké malé $\delta > 0$, které určíme později. Lehce se vidí (úloha 7), že řešitelnost rovnice (1) pro neznámou funkci f je ekvivalentní řešitelnosti rovnice

$$\forall\, x \in I : \; f(x) = b + \int_a^x F(t,\, f(t))\, \mathrm{d}t \;, \tag{2}$$

taktéž pro neznámou funkci f. Ukážeme, že pro dostatečně malé $\delta > 0$ má na intervalu I rovnice (2), a tedy i rovnice (1), jednoznačné řešení f. Pravá strana rovnice (2) definuje zobrazení

$$A\colon C(I) \to C(I)$$

z množiny spojitých funkcí $f\colon I \to \mathbb{R}$ do sebe, totiž

$$A(f) = g, \;\; \text{kde pro } x \in I \text{ je } \; g(x) := b + \int_a^x F(t,\, f(t))\, \mathrm{d}t \;.$$

Dokážeme, že A je kontrahující zobrazení MPu $(C(I), d)$ s maximovou metrikou d do sebe. Vzhledem k větě 2 a tvrzení 5 pak A má jednoznačný pevný bod, funkci $f \in C(I)$, že $A(f) = f$, a rovnice (1) a (2) mají jednoznačná řešení.

Dokážeme tedy, že pro dostatečně malé $\delta > 0$ je A kontrahující zobrazení. Nechť $f, g \in C(I)$. Pak

$$
\begin{aligned}
& d(A(f),\, A(g)) = \\
\overset{\text{def. metriky } d}{=} \quad & \max_{x\in I} |A(f)(x) - A(g)(x)| \\
\overset{\text{def. zobr. } A}{=} \quad & \max_{x\in I} \left| \int_a^x F(t,\, f(t))\, \mathrm{dt} - \int_a^x F(t,\, g(t))\, \mathrm{dt} \right| \\
\overset{\text{linearita } \int}{=} \quad & \max_{x\in I} \left| \int_a^x \big(F(t,\, f(t)) - F(t,\, g(t))\big)\, \mathrm{dt} \right| \\
\overset{|\int h| \le \int |h|}{\le} \quad & \max_{x\in I} \int_a^x \big|F(t,\, f(t)) - F(t,\, g(t))\big|\, \mathrm{dt} \\
\overset{\text{př. o } F,\, h \le j \Rightarrow \int h \le \int j}{\le} \quad & \max_{x\in I} \int_a^x M|f(t) - g(t)|\, \mathrm{dt} \\
\overset{h \le j \Rightarrow \int h \le \int j}{\le} \quad & \max_{x\in I} \int_a^x M \cdot d(f,\, g)\, \mathrm{dt} \\
\overset{\int_a^x c = (x-a)c}{=} \quad & \delta M \cdot d(f,\, g)\ .
\end{aligned}
$$

Například pro $\delta = 1/2M$ je tedy A kontrahující zobrazení, s konstantou $c = 1/2$. □

Úloha 7 *Dokažte, že funkce $f \colon I \to \mathbb{R}$ je řešením rovnice* (1)*, právě když je f řešením rovnice* (2)*.*

Například rovnice

$$f(1) = -3 \wedge f' = f$$

má tedy na nějakém okolí čísla 1 jednoznačné řešení, protože zde $F(u, v) = v$ a podmínka na funkci F je splněna s konstantou $M = 1$. Tímto řešením je funkce

$$f(t) = (-3/e) \exp(t)\ .$$

Úloha 8 *Dokažte, že Picardova věta platí i za tohoto slabšího předpokladu o funkci F: existují konstanty $h, M > 0$, že*

$$F\colon (a-h,\, a+h) \times (b-h,\, b+h) \to \mathbb{R}$$

je spojitá a pro každé dvě dvojice (u, v) a (u, w) z definičního oboru F je

$$|F(u,\, v) - F(u,\, w)| \le M \cdot |v - w|\ .$$

• *Peanova věta* je následující věta o existenci (ale už ne jednoznačnosti) řešení diferenciálních rovnic téhož druhu, jako výše.

Věta 9 (Peanova) *Nech $(a, b) \in U \subset \mathbb{R}^2$, kde U je otevřená množina v euklidovské rovině $\mathbb{R}^2$, a $F : U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom existuje $\delta > 0$ a taková funkce*

$$f : [a - \delta,\, a + \delta] \to \mathbb{R}\ ,$$

že

$$f(a) = b \wedge \forall\, x \in [a - \delta,\, a + \delta] :\ f'(x) = F(x,\, f(x))\ .$$

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že stačí dokázat takovou verzi Peanovy věty, nazvěme ji VP2, v níž je interval $[a - \delta, a + \delta]$ nahrazen intervalem $[a, a + \delta]$. Skutečně, podle VP2 existuje $\delta' > 0$ a funkce f_1, že

$$f_1(-a) = b \ \text{ a } \ \forall\, t \in [-a, -a + \delta'] :\ f_1'(t) = G(t,\, f_1(t))\ ,$$

kde $G(u, v) := -F(-u, v)$. Pro $f_2(t) := f_1(-t)$ pak máme $f_2(a) = b$ a pro každé $t \in [-\delta' + a, a]$ je

$$f_2'(t) = -f_1'(-t) = -G(-t,\, f_1(-t)) = F(t,\, f_2(t))\ .$$

Toto řešení naší úlohy nalevo od bodu a složíme s nějakým jejím řešením napravo od a, získaným opět podle VP2, a dostaneme řešení na nějakém celém δ-okolí bodu a (úloha 10).

Dokazujeme tedy VP2: existuje $\delta > 0$ a funkce $f\colon [a, a+\delta] \to \mathbb{R}$, že

$$f(a) = b \wedge \forall\, t \in [a,\, a+\delta]:\ f'(t) = F(t,\, f(t))\ .$$

Vezmeme konstanty $a', b' > 0$, že F je definovaná a spojitá na $[a, a+a'] \times [b-b', b+b']$. Takže $|F| < L$ na této množině, pro nějakou konstantu $L > 0$. Vezmeme interval

$$I := [a,\, a+c],\ \text{ kde }\ c := \min(a',\, b'/L)\ ,$$

a množinu funkcí

$$\mathcal{A} := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f(a) = b \text{ a } s,\, t \in I \Rightarrow |f(s) - f(t)| \le L|s-t|\}\ .$$

Podle volby c je pro každou $f \in \mathcal{A}$ složená funkce $F(t, f(t))$, $t \in I$, dobře definovaná, spojitá a omezená (konstantou L). Můžeme proto definovat funkcionál $P\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty)$,

$$P(f) := \max_{t \in I} \left| f(t) - b - \int_a^t F(s,\, f(s))\, \mathrm{d}s \right|\ .$$

Lehce se jako dříve vidí, že když $P(f) = 0$, pak je f řešením VP2: $f(a) = b$ a $f'(t) = F(t, f(t))$ na $[a, a+c]$. Podle následující věty 14 je

$$\mathcal{A} \subset C(I)$$

kompaktní množina v MPu $(C(I), d)$ s maximovou metrikou. Lehce se vidí, že funkcionál P je spojitý (úloha 11), a tedy nabývá na nějaké funkci $\varphi \in \mathcal{A}$ svou nejmenší hodnotu.

Ukážeme, že $P(\varphi) = 0$, a to tak, že nalezneme takové funkce $f_n \in \mathcal{A}$ pro $n = 2, 3, \ldots$, že $P(f_n) \to 0$. Definujeme je fakticky rekurentně jako

$$\forall\, t \in [a,\, a + c/n] :\ f_n(t) := b$$

a

$$\forall\, t \in (a + c/n,\, a + c] :\ f_n(t) := b + \int_a^{t-c/n} F(s,\, f_n(s))\ \mathrm{ds}\ .$$

Není těžké vidět, že tato rekurence korektně a jednoznačně definuje funkci f_n a že $f_n \in \mathcal{A}$ (úloha 12). Pak ale pro každé $t \in [a, a + c/n]$ je (podle první části definice f_n)

$$\left| f_n(t) - b - \int_a^t F(s,\, f_n(s))\ \mathrm{ds} \right| = \left| \int_a^t F(s,\, f_n(s))\ \mathrm{ds} \right| \le \frac{Lc}{n}$$

a pro každé $t \in (a + c/n, a + c]$ je (podle druhé části definice f_n a linearity integrálu)

$$\left| f_n(t) - b - \int_a^t F(s,\, f_n(s))\ \mathrm{ds} \right| = \left| \int_{t-c/n}^t F(s,\, f_n(s))\ \mathrm{ds} \right| \le \frac{Lc}{n}\ ,$$

obojí pomocí ML odhadů integrálů. Tedy $0 \le P(f_n) \le \frac{Lc}{n}$ a skutečně $P(f_n) \to 0$ pro $n \to \infty$. $\square$

Důkaz je převzat z: R. L. Pouso, Peano's Existence Theorem revisited, arXiv:1202.1152v1, 2012.

Úloha 10 *Vysvětlete podrobně, jak řešení úlohy nalevo od bodu a spojíme s řešením napravo od bodu a a proč tato řešení lze spojit.*

Úloha 11 *Dokažte, že funkcionál P v předešlém důkazu je spojitý.*

Úloha 12 *Dokažte, že funkce f_n v předešlém důkazu jsou dobře definované a leží v množině $\mathcal{A}$.*

Úloha 13 (nejednoznačnost řešení) *Pro reálná čísla $a < 0 < b$ definujeme funkci $f = f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako*

$$t \le a \Rightarrow f(t) := (t-a)^3,\ a \le t \le b \Rightarrow f(t) := 0$$

a

$$t \ge b \Rightarrow f(t) = (t-b)^3\ .$$

Dokažte, že každá z těchto funkcí je na $\mathbb{R}$ řešením rovnice

$$f(0) = 0 \wedge f'(t) = 3f(t)^{2/3} := 3(f(t)^{1/3})^2\ .$$

Mocnina $x^{1/3}$ je zde pro $x < 0$ definována jako $-(-x)^{1/3}$.

Věta 14 (Arzelà–Ascoliova) *Nechť $I = [a,b]$ je kompaktní reálný interval a $C(I)$ je* MP *spojitých funkcí $f \colon I \to \mathbb{R}$ s maximovou metrikou. Množina $X \subset C(I)$ je kompaktní, právě když*

$$\exists\, c > 0\, \forall\, f \in X\, \forall\, x \in I : |f(x)| < c$$

— funkce v X jsou stejně omezené — a

$$\begin{gathered}\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, f \in X\, \forall\, x, y \in I : \\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\end{gathered}$$

— funkce v X jsou stejně (stejnoměrně) spojité.

Důkaz. Příště. □

DĚKUJI ZA POZORNOST!