MATEMATICKÁ ANALÝZA 3 (NMAI056)
letní semestr 2021/22
přednášející: Martin Klazar

PŘEDNÁŠKA 1 (18. 2. 2022) METRICKÉ PROSTORY. HEMISFÉRA NENÍ PLOCHÁ. p-ADICKÉ ULTRAMETRIKY.

Aktuální sylabus předmětu v SISu:

1. Metrické prostory: úplnost, souvislost, kompaktnost.
2. Řady: číselné (sic!), mocninné i funkční. Různé typy konvergence, operace s řadami. Fourierovy řady.
3. Komplexní analýza: holomorfní funkce, Cauchyho vzorec – póly funkcí, aplikace.
4. Úvod do diferenciálních rovnic: rovnice se separovanými proměnnými, lineární rovnice. Věta o existenci, numerický pohled.

Budeme se jím zhruba řídit.

Metrický prostor (krátce *MP*) je dvojice (M, d) množiny $M \neq \emptyset$ a zobrazení

$$d\colon M \times M \to \mathbb{R}$$

zvaného *metrika* či *vzdálenost*, které $\forall\, x, y, z \in M$ splňuje:

1. $d(x,\, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x,\, y) = d(y,\, x)$ ... *symetrie.*
3. $d(x,\, y) \le d(x,\, z) + d(z,\, y)$ ... *trojúhelníková nerovnost.*

Úloha 1. *Dokažte, že vždy* $d(x, y) \ge 0$.

Uvažují se i MPy s nekonečnými vzdálenostmi, ale naše metriky budou mít vždy konečné hodnoty.

Každá podmnožina $X \subset M$ určuje nový MP (X, d'), tak zvaný *podprostor* MPu (M, d): pro $x, y \in X$ klademe $d'(x, y) := d(x, y)$. Obě metriky označíme stejným symbolem a máme MP (X, d). *Izometrie* f dvou MPů (M, d) a (N, e) je bijekce $f\colon M \to N$, jež zachovává vzdálenosti:

$$\forall\, x,\, y \in M:\ d(x,\, y) = e(f(x),\, f(y))\ .$$

Existuje-li, prostory (M, d) a (N, e) jsou *izometrické*. Znamená to, že jsou fakticky nerozlišitelné.

Asi nejdůležitějším příkladem MPu je (n-rozměrný) *Euklidovský prostor* $(\mathbb{R}^n, e_n)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, s metrikou e_n danou pro $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n), \overline{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ formulí

$$e_n(\overline{x},\, \overline{y}) := \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}\ .$$

Geometricky je e_n délka úsečky určené body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. *Euklidovským prostorem* pak rozumíme obecněji každý podprostor (X, e_n), když $X \subset \mathbb{R}^n$.

Tvrzení 2 ($\mathbb{R}^n$ je MP). *$(\mathbb{R}^n, e_n)$ je metrický prostor.*

Důkaz. Funkce e_n zřejmě má vlastnosti 1 a 2 metriky. Pro $n = 1$ je trojúhelníková nerovnost triviální a pro $n \geq 2$ ji dokážeme geometricky převedením na rovinný případ $n = 2$. Tři různé nekolineární body v $\mathbb{R}^n$ totiž jednoznačně určují dvourozměrnou rovinu $R \subset \mathbb{R}^n$ a všechny tři vzdálenosti mezi nimi v $\mathbb{R}^n$ jsou stejné jako v R. To je ovšem netriviální geometrická vlastnost euklidovské vzdálenosti, jejíž zobecnění si můžete dokázat v úloze 4. Stačí tak dokázat trojúhelníkovou nerovnost v $\mathbb{R}^2$. Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ jsou tři různé nekolineární body (jinak pro ně trojúhelníková nerovnost platí triviálně) a předpokládejme, že

$$e_2(A, B) \geq e_2(A,\ C),\ e_2(C,\ B)\ .$$

Stačí dokázat, že $e_2(A, B) \leq e_2(A, C) + e_2(C, B)$. Podle úlohy 3 leží pata D výšky spuštěné z C na přímku AB uvnitř úsečky AB. Uvážíme dva pravoúhlé trojúhelníky ADC a BDC, s pravým úhlem u vrcholu D. Pak dvojím použitím úlohy 3 máme

$$e_2(A, B) = e_2(A, D) + e_2(D, B) < e_2(A, C) + e_2(C, B)\ .$$

$\square$

Úloha 3. *Nechť $ABC \subset \mathbb{R}^2$ je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu B. Pak $e_2(A, B), e_2(B, C) < e_2(A, C)$.*

Úloha 4. *Nechť $m \leq n$ jsou přirozená čísla a $R \subset \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor v $\mathbb{R}^n$ dimenze m, např. pro $m = 1$ je R přímka a pro $m = 2$ je R rovina. Ukažte, že MPy (R, e_n) a $(\mathbb{R}^m, e_m)$ jsou izometrické.*

Úloha 5. *$G = (V, E)$ buď souvislý (a ne nutně konečný) graf a funkce $d\colon V \times V \to \mathbb{N}_0$ $(= \{0, 1, 2, \dots\})$ buď definována jako*

$$d(u,\ v) := \#\ \textit{hran na nejkratší cestě v}\ G\ \textit{z}\ u\ \textit{do}\ v\ .$$

Rozhodněte, zda (V, d) je MP.

Úloha 6. *Například v životopisu A. Roberts,* Churchill. Walking with destiny, *Penguin Books, 2019, se taky často setkáváme se zkratkou „MP". Co v této knize znamená?*

Úloha 7. *Nechť* $M = \mathcal{R}(a,b)$ *je množina funkcí, které mají na intervalu* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *Riemannův integrál, a pro* $f, g \in M$ *nechť*

$$d(f,\, g) := \int_a^b |f(t) - g(t)|\, \mathrm{dt}\ .$$

Rozhodněte, zda (M, d) *je* MP.

Úloha 8 *Nechť* $A \neq \emptyset$ *je množina (abeceda) a*

$$M = A^n := \{u = u_1 u_2 \ldots u_n \mid u_i \in A\},\ \ n \in \mathbb{N}\ ,$$

je množina slov nad abecedou A *s délkou* n. *Funkci* $d\colon M \times M \to \mathbb{N}_0$ *definujeme jako*

$$d(u,\, v) := \#\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid u_i \neq v_i\}\ .$$

Dokažte, že (M, d) *je* MP.

Úloha 9. *Nechť* $X \neq \emptyset$ *je množina a nechť*

$$M := \{f \mid (f\colon X \to \mathbb{R}) \wedge \exists\, c > 0 :\ x \in X \Rightarrow |f(x)| < c\}$$

je množina omezených reálných funkcí definovaných na X. *Pro* $f, g \in M$ *definujeme*

$$d(f,\, g) := \sup(\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\})\ .$$

Dokažte, že (M, d) *je* MP.

Sférická metrika. Jako

$$S := \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

označíme *jednotkovou sféru* (sféru s poloměrem 1) v Euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Funkci $s\colon S \times S \to [0, \pi]$ definujeme pro $\overline{x}, \overline{y} \in S$ jako

$$s(\overline{x},\, \overline{y}) = \begin{cases} 0 & \ldots \quad \overline{x} = \overline{y} \ \text{ a} \\ \varphi & \ldots \quad \overline{x} \neq \overline{y}\ , \end{cases}$$

kde φ je úhel sevřený dvěma přímkami procházejícími *počátkem* $\overline{0} := (0,0,0)$ a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Tento úhel je vlastně délka kratšího z oblouků mezi body $\overline{x}$ a $\overline{y}$ na jednotkové kružnici vytknuté na S rovinou určenou počátkem a body $\overline{x}$ a $\overline{y}$. Funkci s nazveme *sférickou metrikou.*

Pro důkaz, že s je metrika, zavedeme následující terminologii. Pro $A \in \mathbb{R}^3$ *A-paprskem* rozumíme polopřímku v $\mathbb{R}^3$ vycházející z A a $u(p,q) \in (0,\pi)$ je úhel sevřený dvěma různými a neantipodálními A-paprsky p a q. Pro A-paprsek q a $\beta \in (0,\pi)$ rozumíme *kuželem* $K = K(q,\beta)$ (s osou q a vrcholem A) plochu

$$K := \bigcup\{p \mid p \text{ je } A\text{-paprsek a } u(p,\, q) = \beta\}\ .$$

Tvrzení 10 (S je MP). *(S,s) je metrický prostor.*

Důkaz. Funkce s patrně má vlastnosti 1 a 2 metriky a stačí pro tři body na S dokázat vlastnost 3. Můžeme předpokládat, že jsou vzájemně různé a žádné dva z nich nejsou antipodální (souměrné podle počátku). Jinak totiž pro ně trojúhelníková nerovnost platí triviálně. Dokážeme, že jsou-li p, q a r tři různé a neantipodální $\overline{0}$-paprsky (určené danými body), $u(p,q) = \alpha$, $u(q,r) = \beta$ a $u(p,r) = \gamma$, pak $\gamma \le \alpha + \beta$. Budeme předpokládat, že p, q, α a β jsou dány a nalezneme $r \subset K(q,\beta)$ tak, aby se úhel γ maximalizoval. Podle úlohy 11 se r rovná jednomu ze dvou $\overline{0}$-paprsků tvořících průnik $R \cap K(q,\beta)$, kde R je rovina určená p a q. V R již máme rovinnou situaci a je jasné, že pro tři různé a neantipodální polopřímky v $\mathbb{R}^2$ vycházející z počátku $(0,0)$ a úhly $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi)$ určené jejich dvojicemi vždy platí nerovnost $\gamma \le \alpha + \beta$ (úloha 12). $\square$

Úloha 11. *p a q buďte dva různé neantipodální $\overline{0}$-paprsky, β buď úhel v $(0,\pi)$ a $R \subset \mathbb{R}^3$ buď rovina určená p a q. Pak* *největší úhel*

$$\max_{r \subset K(q,\beta)} u(p, r)$$

se nabývá na jednom z $\overline{0}$-paprsků tvořících $K(q, \beta) \cap R$.

Úloha 12. *$p, q, r \subset \mathbb{R}^2$ buďte tři různé a neantipodální polopřímky vycházející z počátku $(0, 0)$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ buďte úhly určené jejich dvojicemi. Pak $\gamma \leq \alpha + \beta$.*

Naším cílem je nyní dokázat, že sférická metrika se podstatně liší od euklidovské.

(Horní) *hemisféra H* je množina

$$H := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_3 \geq 0\} \subset S\ .$$

Věta 13 (H není plochá). *Metrický prostor (H, s) není izometrický žádnému Euklidovskému prostoru (X, e_n) s $X \subset \mathbb{R}^n$.*

Důkaz. Následující vlastnost vzdáleností daných čtyřmi body t, u, v a w v Euklidovském prostoru $(\mathbb{R}^n, e_n)$ není splněna v (H, s):

$$\begin{aligned} &e_n(t, u) = e_n(t, v) = e_n(u, v) > 0 \wedge \\ &\wedge e_n(t, w) = e_n(w, u) = \tfrac{1}{2} e_n(t, u) \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ e_n(w, v) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} e_n(t, v)\ (< e_n(t, v))\ . \end{aligned}$$

Podle předpokladu implikace body t, u a v tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky $x > 0$ a w má od t i od u vzdálenost $\frac{x}{2}$. Podle úlohy 14 je pak w středem úsečky tu. Tyto čtyři body jsou tedy koplanární (všechny leží v jedné rovině) a úsečka vw je výška spuštěná z vrcholu v rovnostranného trojúhelníka tuv na stranu tu. Podle Pythagorovy věty se její délka $e_2(v, w) = e_n(v, w)$ (viz úloha 4) rovná $\frac{\sqrt{3}}{2} x$, což říká závěr implikace.

Na hemisféře (H, s) nalezneme čtyři různé body t, u, v a w splňující předpoklad předchozí implikace, ale ne její závěr. Z toho plyne, že izometrie mezi hemisférou a Euklidovským prostorem neexistuje, protože každá izometrie ze své definice implikaci zachovává. Tyto body jsou

$$t = (1, 0, 0), \; u = (0, 1, 0), \; v = (0, 0, 1) \text{ a } w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) .$$

Patrně $s(t, u) = s(t, v) = s(u, v) = \frac{\pi}{2}$ a $s(t, w) = s(w, u) = \frac{1}{2}s(t, u) = \frac{\pi}{4}$. Bod v je „severní pól" ($x_3 = 1$), t, u a w leží na „rovníku" ($x_3 = 0$) a w je střed oblouku tu. Ale všechny body na rovníku mají od pólu v stejnou vzdálenost $\frac{\pi}{2}$. Takže $s(w, v) = s(t, v)$ a závěr implikace neplatí. $\square$

Nedal by se předchozí důkaz zjednodušit, že bychom argumentovali jen tříbodovými konfiguracemi (úloha 16)? A co když místo celé hemisféry vezmeme jen malý sférický vrchlík (úloha 17)?

Úloha 14. *Když $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ jsou různé body v Euklidovském prostoru se vzdálenostmi $e_n(c, a) = e_n(c, b) = \frac{1}{2}e_n(a, b)$, pak c je střed úsečky ab.*

Úloha 15. *Platí analogie předchozího i v* MPu (S, s)*?*

Úloha 16. *Dá se libovolný sférický trojúhelník izometricky realizovat v euklidovské rovině* $(\mathbb{R}^2, e_2)$*?*

Úloha 17. *Dokažte, že žádný sférický vrchlík (část sféry S odseknutá rovinou) se sférickou metrikou není izometrický Euklidovskému prostoru (X, e_n).*

Metrika d v MPu (M, d) je *ultrametrika*, též *nearchimédovská metrika*, když splňuje *silnou trojúhelníkovou nerovnost*

$$\forall\, x,\, y,\, z \in M :\ d(x,\, y) \le \max(d(x,\, z),\, d(z,\, y))\ .$$

Protože $\max(d(x, z), d(z, y)) \le d(x, z) + d(z, y)$, je každá ultrametrika metrika. V následujícím tvrzení a úloze si zvykneme na to, že při práci v *ultrametrických prostorech*, krátce *UMP*, je nutné se rozloučit s intuicí založenou na Euklidovských prostorech.

Tvrzení 18 (trojúhelníky v UMP). *V ultrametrickém prostoru (M, d) je každý trojúhelník rovnoramenný, to jest má dvě stejně dlouhé strany.*

Důkaz. Nechť $x, y, z \in M$ jsou tři různé body v UMPu (M, d). Nechť $d(x, y) \ge d(x, z), d(z, y)$. Protože d je ultrametrika, z

$$d(x,\, y) \le \max(d(x,\, z),\, d(z,\, y))$$

plyne, že $d(x, y) = d(x, z)$ nebo $d(x, y) = d(z, y)$. $\square$

(Otevřená) *koule* (se středem $a \in M$ a poloměrem $r > 0$) v MPu (M, d) je podmnožina

$$B(a,\, r) := \{x \in M \mid d(x,\, a) < r\} \subset M\ .$$

Vždy $B(a, r) \ne \emptyset$, protože $a \in B(a, r)$.

Úloha 19. *Dokažte, že pro každou kouli v* UMPu *je každý její bod jejím středem.*

Úloha 20. *Dokažte důležitý dodatek k silné trojúhelníkové nerovnosti: když $d(x, z) \ne d(z, y)$, pak platí jako rovnost.*

UMPy se při prvním setkání mohou jevit bizarně, ale ve skutečnosti silná trojúhelníková nerovnost mnohé zjednodušuje. Například — na rozdíl od obecného MPu — nekonečná řada v UMPu konverguje, právě když její sčítanec jde k 0. Základním příkladem ultrametrik jsou p-adické vzdálenosti zlomků, a proto je nyní definujeme.

p-adické metriky. Nechť $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ je prvočíslo a nechť $n \in \mathbb{Z}$ je nenulové celé číslo. Definujeme *p-adický řád* čísla n:

$$\mathrm{ord}_p(n) := \max(\{m \in \mathbb{N}_0 \mid p^m \,|\, n\}) \ .$$

Zde $\cdot \,|\, \cdot$ označuje *relaci dělitelnosti* na $\mathbb{Z}$: pro $a, b \in \mathbb{Z}$ je

$$a \,|\, b \ \stackrel{\text{def}}{\iff} \ \exists\, c \in \mathbb{Z} : \ b = ac \ .$$

Pro každé p definujeme $\mathrm{ord}_p(0) := +\infty$.

Funkci $\mathrm{ord}_p(\cdot)$ rozšíříme na zlomky. Pro nenulový zlomek $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ definujeme

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) := \mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b) \ ,$$

a jinak klademe zase $\mathrm{ord}_p(0) = \mathrm{ord}_p(0/b) := +\infty$. Např. máme $\mathrm{ord}_5(297/100) = -2$, $\mathrm{ord}_{11}(297/100) = 1$ a $\mathrm{ord}_3(297/100) = 3$.

Úloha 21. *Ukažte, že* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \mathrm{ord}_p(a/b) = \mathrm{ord}_p(c/d)$.

Tvrzení 22 (aditivita $\mathrm{ord}_p(\cdot)$). *Platí, že*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} : \ \mathrm{ord}_p(\alpha\beta) = \mathrm{ord}_p(\alpha) + \mathrm{ord}_p(\beta) \ ,$$

kde $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + n = n + (+\infty) := +\infty$ *pro každé* $n \in \mathbb{Z}$.

Důkaz. Nechť $\alpha = \frac{a}{b}$ a $\beta = \frac{c}{d}$. Levá strana uvedené rovnosti pak je

$$\mathrm{ord}_p(ac) - \mathrm{ord}_p(bd)$$

a pravá je

$$\mathrm{ord}_p(a) - \mathrm{ord}_p(b) + \mathrm{ord}_p(c) - \mathrm{ord}_p(b)\ .$$

Uvedenou rovnost tedy stačí dokázat v oboru celých čísel. Tam platí díky *Základní větě aritmetiky* (jednoznačnosti rozkladů čísel na součiny mocnin prvočísel). $\square$

p-adické normy jsou mezikrokem k definici p-adických metrik. Fixujeme reálnou konstantu $c \in (0,1)$ a definujeme funkci $|\cdot|_p\colon \mathbb{Q} \to [0,+\infty)$, tzv. *$p$-adickou normu*, jako

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := c^{\mathrm{ord}_p(a/b)}\ ,$$

kde klademe $|0|_p = c^{+\infty} := 0$. Např. pro $c = \frac{1}{2}$ je $|\frac{1}{100}|_5 = 4$. Snadno se dokáže

Úloha 23 (multiplikativita $|\cdot|_p$). *Dokažte, že pro každé p, každé dva zlomky α, β a každé $c \in (0,1)$ je*

$$|\alpha \cdot \beta|_p = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p\ .$$

Normované těleso $F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, |\cdot|_F)$, psáno zkráceně $(F, |\cdot|_F)$, je těleso F vybavené *normou* $|\cdot|_F\colon F \to [0,+\infty)$, jež splňuje tři následující požadavky.

1. $\forall\, x \in F:\ |x|_F = 0 \iff x = 0_F$.
2. $\forall\, x, y \in F:\ |x \cdot_F y|_F = |x|_F \cdot |y|_F \ldots$ *multiplikativita.*
3. $\forall\, x, y \in F:\ |x +_F y|_F \le |x|_F + |y|_F \ldots$ *trojúhelníková nerovnost.*

Základní příklady normovaných těles jsou těleso zlomků $\mathbb{Q}$, těleso reálných čísel $\mathbb{R}$ a těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$, kde norma je obvyklá absolutní hodnota $|\cdot|$.

Úloha 24. *V každém normovaném tělese* $(F, |\cdot|_F)$ *je* $|1_F|_F = 1$ *a pro každé* $x \in F$ *je* $|-x|_F = |x|_F$ *a, pro* $x \neq 0_F$, $|x^{-1}|_F = 1/|x|_F$.

Úloha 25. *Dokažte, že pro každé normované těleso* $(F, |\cdot|_F)$ *je funkce*

$$d(x, y) := |x - y|_F$$

metrika na F. *Dokažte, že když* $|\cdot|_F$ *splňuje silnou trojúhelníkovou nerovnost (definovanou zřejmým způsobem, viz níže), pak* d *je ultrametrika.*

Další důležité příklady normovaných těles poskytuje těleso zlomků $\mathbb{Q}$ spolu s p-adickými normami.

Tvrzení 26 (o $|\cdot|_p$**).** *Pro každé prvočíslo* p *a každé* $c \in (0, 1)$ *je* $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ *normované těleso. Příslušný metrický prostor* $(\mathbb{Q}, d)$, *definovaný podle úlohy 25, je ultrametrický prostor.*

Důkaz. Multiplikativita normy $|\cdot|_p$ je dokázaná v úloze 23. Zbývá pro ni dokázat silnou trojúhelníkovou nerovnost

$$\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{Q} :\ |\alpha + \beta|_p \le \max(|\alpha|_p,\, |\beta|_p)\ .$$

Ta je ekvivalentní nerovnosti pro p-adické řády

$$\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{Q} :\ \mathrm{ord}_p(\alpha + \beta) \ge \min(\mathrm{ord}_p(\alpha),\, \mathrm{ord}_p(\beta))\ .$$

Nechť $\alpha = \frac{a}{b}$ a $\beta = \frac{c}{d}$ jsou nenulové zlomky (když $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$, nerovnost platí triviálně jako rovnost) a $\mathrm{ord}_p(\alpha) =: m$ a $\mathrm{ord}_p(\beta) =: n$ jsou v $\mathbb{Z}$. Jinými slovy, $\frac{a}{b} = p^m \frac{a'}{b'}$ a $\frac{c}{d} = p^n \frac{c'}{d'}$, kde žádné z celých čísel a', b', c' a d' není dělitelné p. Řekněme, že

$m \leq n$. Pak

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = p^m \cdot \frac{a'd' + p^{n-m}c'b'}{b'd'} =: p^m \cdot \frac{e}{f} \, .$$

Patrně $e, f \in \mathbb{Z}$ a p nedělí f, takže $\mathrm{ord}_p(e/f) \geq 0$ a, díky aditivitě p-adického řádu, $\mathrm{ord}_p(\alpha + \beta) \geq m = \min(\mathrm{ord}_p(\alpha), \mathrm{ord}_p(\beta))$. $\square$

DĚKUJI ZA POZORNOST

Ale ještě domácí úkoly na cvičení. Zašlete mi prosím do půlnoci úterý 1. 3. e-mailem řešení úloh: 1, 3, 5, 7 a 19.