7. cvičení 18. 11. 2009 — test na metrické prostory

Všechny příklady jsou za 3 body. Odpovědi vždy zdůvodněte.

1. Nechť $d(x, y)$ je metrika na množině M. Je pravda, že i funkce $d(x, y)/5$ je metrika na M?
2. Totéž pro funkci $d(x, y)^2$.
3. Množina v metrickém prostoru je G_δ-množina, když se dá vyjádřit jako průnik spočetně mnoha otevřených množin. Ukažte, že množina $\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ je G_δ-množina v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.
4. Popište obojetné množiny v euklidovském podprostoru $X = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \subset \mathbb{R}$.
5. Jaké souvislé podmnožiny obsahuje tento metrický prostor X?
6. Popište uzávěr množiny $X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \;\&\; y \neq \frac{1}{2}\}$ v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$.
7. Popište uzávěr množiny $X = \{f_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$, $f_n(x) = x^n$ pro $-1 \leq x \leq 1$, v metrickém prostoru omezených funkcí $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou.
8. Je tato množina X v uvedeném metrickém prostoru úplná?
9. Je podmnožina $X = \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \dots\}$ euklidovského prostoru $\mathbb{R}$ kompaktní?
10. Je úplná?

Řešení.

1. Ano. Splňuje-li funkce $d(x, y)$ axiomy metriky—algebraické identity $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$—splňuje je i funkce $d'(x, y) = d(x, y)/5$, obecněji i každý nenulový násobek metriky.
2. Ne. $d'(x, y) = d(x, y)^2$ nesplňuje obecně trojúhelníkovou nerovnost, např. $5 \leq 2 + 3$, ale $5^2 \not\leq 2^2 + 3^2$.

3. Například

$$\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \mid 1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}, y \in \mathbb{R}\}$$

   a každá z množin v průniku (otevřený pás s tloušťkou $2/n$) je otevřená množina.

4. Každá podmnožina množiny X je obojetná. V prostoru (X, d), kde d je eukl. metrika $d(x, y) = |x - y|$, je totiž každý bod $b \in X$ izolovaný a tedy $\{b\}$ je otevřená množina (např. $B(b, \frac{1}{3}) = \{b\}$) a sjednocování otevřených množin dává, že každá podmnožina X je otevřená a tudíž i uzavřená.

5. Souvislé jsou pouze množiny $\emptyset$ a jednobodovky $\{b\}$, $b \in X$. (Tyto množiny jsou souvislé v každém metrickém prostoru.) Každá jiná podmnožina množiny X obsahuje netriviální obojetnou podmnožinu.

6. Množina X je kruh s poloměrem 1 a středem v počátku, bez hraniční kružnice a bez bodů na přímce $y = \frac{1}{2}$. Uzávěr X v $\mathbb{R}^2$ je uzavřený kruh $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

7. Tento a následující příklad se ukázaly být—proti mému záměru—poněkud obtížnější. Množina X je uzavřená a je tedy svým uzávěrem, $\overline{X} = X$.

   Ukažme, že z X se v supremové metrice nedá vykonvergovat. Připomeňme si, že pro dvě omezené funkce $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ je jejich vzdálenost v supremové metrice

$$d(f, g) = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x) - g(x)|.$$

   Není těžké vidět, že pro každé pevné $m \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $n > n_0$ máme

$$d(f_m, f_n) > 1/2$$

   (místo $1/2$ tady může být libovolná konstanta $c \in (0, 1)$). Skutečně, pro dané m najdeme $a \in (0, 1)$, že $f_m(a) = a^m > \frac{3}{4}$ (neboť $\lim_{a \to 1^+} f_m(a) = \lim_{a \to 1^+} a^m = 1$ pro každé pevné $m \in \mathbb{N}$) a pak pro dostatečně velké

n_0 a každé $n \geq n_0$ máme $f_n(a) \leq f_{n_0}(a) < \frac{1}{4}$ (neboť $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pro každé pevné $a \in (-1,1)$). Pak pro každé $n \geq n_0$ je

$$d(f_m, f_n) \geq |f_m(a) - f_n(a)| > 1/2.$$

Odtud plyne (podrobně to zdůvodníme), že z množiny funkcí $X = \{f_1, f_2, \dots\}$ se dá vybrat pouze triviální cauchyovská podposloupnost (a tím spíše pouze triviální konvergentní podposloupnost), totiž eventuálně konstantní podposloupnost, která se eventuálně rovná nějaké funkci f_i. Taková podposloupnost má ovšem limitu rovnou f_i. Z množiny X tedy nelze vykonvergovat a je uzavřená.

Nechť $q = (f_{k_1}, f_{k_2}, \dots)$ je libovolná posloupnost funkcí z X. Posloupnost jejich indexů označíme jako $p = (k_1, k_2, \dots)$. Rozlišíme tři případy: (1) množina $P = \{k_1, k_2, \dots\}$ je konečná a pouze jeden z jejích prvků se v p vyskytuje nekonečněkrát, (2) P je konečná, ale alespoň dva z jejích prvků se v p vyskytují nekonečněkrát a (3) P je nekonečná. Zřejmě právě jeden z nich nastává. V případě (1) je jasné, že p a q jsou eventuálně konstantní posloupnosti (a tedy konvergentní). V případě (2) existují dva různé indexy $a, b \in P$, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existují $i, j > m$, že $k_i = a$ a $k_j = b$. Posloupnost funkcí q tedy není cauchyovská: pro každé $m \in \mathbb{N}$ existují $i, j > m$, že $d(f_{k_i}, f_{k_j}) = d(f_a, f_b) = c$, kde $c > 0$ je konstanta. Podobně q není cauchyovská ani v případě (3). Pro dané $m \in \mathbb{N}$ totiž existuje, jak víme, n_0, že pro $n > n_0$ je $d(f_{k_{m+1}}, f_n) > 1/2$. Protože P je nekonečná, existuje takové $i > m$, že $k_i > n_0$ (neboť $P \not\subset \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \cup \{1, 2, \dots, n_0\}$). Pak $d(f_{k_{m+1}}, f_{k_i}) > 1/2$.

8. Ano, je. X je uzavřená podmnožina v úplném metrickém prostoru a je tedy úplná. (Metrický prostor omezených funkcí $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ se supremovou metrikou je úplný, jak víme z přednášky o stejnoměrné konvergenci—plyne to z tvrzení o Bolzanově–Cauchyově podmínce pro posloupnosti funkcí.)

9. Není. Posloupnost $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = 2\sqrt{2}, \dots$ nemá konvergentní podposloupnost ($d(a_m, a_n) \geq \sqrt{2}$ pro každé $m < n$).

10. Je. Je to uzavřená podmnožina úplného euklidovského prostoru $\mathbb{R}$.