

MA2 – přednáška 3

Martin Klazar

15. října, 2026

Abstrakt

Definujeme ekvivalentní metriky a homeomorfismy topologií. Definujeme topologickou kompaktnost a bez důkazu uvedeme Borelovu–Lebesgueovu větu, že metrická a topologická kompaktnost jsou ekvivalentní. Uvedeme příklad dvou kompaktních množin s nekompaktním průnikem. Dokážeme, že kompaktní množiny v metrických prostorech jsou uzavřené a omezené a že v uzavřených eukleidovských prostorech lze tuto implikaci obrátit. Dokážeme, že každé spojitě zobrazení definované na kompaktním metrickém prostoru je stejnoměrně spojitě. O topologiích dokážeme, že spojitě obrazy kompaktních množin jsou kompaktní, že spojitě reálné funkce definované na kompaktech nabývají minima i maxima a že každá spojitá injekce definovaná na kompaktu a jdoucí do Hausdorffova prostoru má spojitou inverzi. Nakonec definujeme souvislé množiny a prostory a ukážeme, že podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru E_1 je totálně nesouvislý.

Ve třetí přednášce diskutujeme ekvivalenci metrik. Poté uvedeme několik výsledků o kompaktních množinách a kompaktních prostorech. Na závěr zavedeme (ne)souvislé množiny a prostory.

Ekvivalentní metriky a homeomorfismy

Než se obrátíme ke kompaktním prostorům, splníme slib z první přednášky. Vysvětlíme, co znamená, že dvě metriky na téže množině jsou „podobné“.

Definice 1 (ekvivalentní metriky) *d a d' buďte metriky na neprázdné množině M . Řekneme, že jsou ekvivalentní, mají-li metrické prostory $\langle M, d \rangle$ a $\langle M, d' \rangle$ stejné otevřené množiny.*

Ekvivalentní metriky tedy definují tutéž topologii. Uvedeme jeden důsledek této definice. Když $f: M \rightarrow N$ je funkce, d a d' jsou ekvivalentní metriky na M a e a e' jsou ekvivalentní metriky na N , pak je f spojitá jako funkce z metrického prostoru $\langle M, d \rangle$ do metrického prostoru $\langle N, e \rangle$, právě když je f spojitá jako funkce z metrického prostoru $\langle M, d' \rangle$ do metrického prostoru $\langle N, e' \rangle$.

Úloha 2 *Dokažte to.*

Úloha 3 *Ukažte, že ekvivalence metrik je relací ekvivalence.*

Uvedeme kritérium ekvivalence metrik. Budeme psát B_d a $B_{d'}$ pro koule v příslušných metrikách d a d' na M .

Tvrzení 4 *Nechť d a d' jsou dvě metriky na množině $M \neq \emptyset$. Pak d a d' jsou ekvivalentní, právě když*

$$\begin{aligned} \forall b \in M \forall r > 0 \exists s > 0: B_{d'}(b, s) \subset B_d(b, r) \text{ \& } \\ \forall b \in M \forall r > 0 \exists s > 0: B_d(b, s) \subset B_{d'}(b, r). \end{aligned}$$

Důkaz. Předpokládejme, že d a d' jsou ekvivalentní. Nechť jsou dány $b \in M$ a $r > 0$. Jelikož $B_d(b, r)$ je otevřená množina v prostoru $\langle M, d \rangle$, je otevřená také v $\langle M, d' \rangle$. Protože $b \in B_d(b, r)$, existuje $s > 0$, že $B_{d'}(b, s) \subset B_d(b, r)$. Druhý konjunkt v uvedené konjunkci se dokáže stejně.

Předpokládejme, že uvedená konjunkce platí, že $X \subset M$ je otevřená množina v prostoru $\langle M, d \rangle$ a že $b \in X$. Tedy $B_d(b, r) \subset X$ pro nějaký poloměr r . Podle prvního konjuntu existuje poloměr s , že

$$B_{d'}(b, s) \subset B_d(b, r) \ (\subset X).$$

Tedy $B_{d'}(b, s) \subset X$. Vidíme, že X je otevřená také v prostoru $\langle M, d' \rangle$. Pomocí druhého konjuntu obdobně dokážeme, že každá množina otevřená v prostoru $\langle M, d' \rangle$ je otevřená i v prostoru $\langle M, d \rangle$. $\square$

Úloha 5 *Ukažte, že L_p metriky, $p \geq 1$, a L_∞ metrika na $\mathbb{R}^n$, zavedené v první přednášce, jsou všechny vzájemně ekvivalentní.*

Úloha 6 *Topologie libovolného metrického prostoru $\langle M, d \rangle$, v němž je každý bod izolovaný, je diskrétní, tj. je to topologie $\langle M, \mathcal{P}(M) \rangle$.*

Takové metrické prostory nazýváme *izolované*. Z toho plyne, že metriky v libovolných dvou izolovaných prostorech se stejnou nosnou množinou jsou ekvivalentní. Dále definujeme dva izolované metrické prostory na $\mathbb{N}$, z nichž jeden je úplný a druhý nikoli. Z toho plyne, že úplnost metrických prostorů není topologickou vlastností: tyto dvě metriky jsou ekvivalentní, ale jedna je úplná a druhá není.

Tvrzení 7 *Existují takové izolované metrické prostory $M = \langle \mathbb{N}, d \rangle$ a $M' = \langle \mathbb{N}, d' \rangle$, že M je úplný a M' není úplný.*

Důkaz. M definujeme jako diskrétní prostor na $\mathbb{N}$, takže $d(i, j) = 1$ pro $i \neq j$ a $d(i, i) = 0$. Jak víme z Úlohy 30 v Přednášce 1, M je úplný. Navíc je každý bod $i \in \mathbb{N}$ izolovaný, protože $B_M(i, 1) = \{i\}$. Druhá metrika d' je definována tak, že $d'(i, i) = 0$ a pro $i \neq j$ platí

$$d'(i, j) := \frac{1}{\min(i, j)}.$$

Nejprve ukážeme, že funkce d' je metrika. Je zřejmé, že d' je symetrická a nezáporná a že $d'(i, j) = 0$ právě tehdy, když $i = j$. Pro důkaz TI uvažujeme tři čísla $i \leq j \leq k$ v $\mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned} d'(i, j) &= i^{-1} = d'(i, k) \leq d'(i, k) + d'(k, j), \\ d'(i, k) &= i^{-1} = d'(i, j) \leq d'(i, j) + d'(j, k), \text{ a} \\ d'(j, k) &= j^{-1} \leq i^{-1} = d'(j, i) \leq d'(j, i) + d'(i, k), \end{aligned}$$

takže TI platí. Jelikož $B_{M'}(i, \frac{1}{i}) = \{i\}$, je prostor M' izolovaný. V M' je posloupnost $(n) = (1, 2, \dots)$ cauchyovská, ale nemá limitu, protože každý bod v M' je izolovaný (Úloha 8). $\square$

Úloha 8 *V libovolném izolovaném metrickém prostoru mají limitu pouze posloupnosti, které jsou od jistého místa konstantní.*

Připomeneme izomorfismy topologických prostorů. Zobrazení $f: T \rightarrow U$ mezi topologiemi $\langle T, \tau \rangle$ a $\langle U, \upsilon \rangle$ je *spojité*, pokud $f^{-1}[B] \in \tau$ pro každou otevřenou množinu $B \in \upsilon$. Podle Tvrzení 22 v přednášce 1 je zobrazení mezi metrickými prostory spojitě právě tehdy, když je “topologicky” spojitě.

Definice 9 (homeomorfismy) Zobrazení $f: T \rightarrow U$ mezi topologiemi $T = \langle T, \tau \rangle$ a $U = \langle U, \nu \rangle$ je homeomorfismus prostorů T a U , pokud je f spojitá bijekce a rovněž inverz f^{-1} je spojitý.

Úloha 10 Dokažte, že složenina dvou homeomorfismů je homeomorfismus.

Borelova–Lebesgueova věta o kompaktnosti

Připomeňme, že množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je kompaktní, jestliže každá posloupnost $(a_n) \subset X$ má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou $\lim a_{m_n} \in X$.

Definice 11 (kompaktnost) Nechť $T = \langle T, \tau \rangle$ je topologie. Množina $X \subset T$ se nazývá kompaktní, jestliže pro každý systém otevřených množin $U_i \in \tau$, $i \in I$, splňující

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

existuje taková konečná množina indexů $J \subset I$, že stále platí

$$X \subset \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Je-li množina T kompaktní, říkáme, že prostor T je kompaktní.

Řekneme také, že každé otevřené pokrytí množiny X má konečné podpokrytí.

Úloha 12 Jsou-li dvě topologie homeomorfní, pak jsou buď obě kompaktní, nebo ani jedna není kompaktní.

Následující větu o ekvivalenci metrické a topologické kompaktnosti nedokážeme dokazovat, protože důkaz probereme v kurzu MA3.

Věta 13 (Borel–Lebesgue) Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor, T je odpovídající metrická topologie a $X \subset M$. Potom je množina X kompaktní v M právě tehdy, když je X kompaktní v T .

Věta je připisována francouzským matematikům Émilovi Borelovi (1871–1956) a Henrimu Lebesgueovi (1875–1941). V kontextu eukleidovských metrických prostorů se někdy nazývá Heineova–Borelova věta.

Úloha 14 Dokažte, že sjednocení dvou kompaktních množin v topologickém prostoru je kompaktní množina.

Úloha 15 *Dokažte, že každá uzavřená množina v kompaktním topologickém prostoru je kompaktní.*

Průniky kompaktních množin

Metrická a topologická kompaktnost se liší v operaci průniku množin. V literatuře jsme tento bod nenašli jasně vysvětlený a využíváme příležitosti ho tu objasnit.

Věta 16 (kompaktnost a průniky) *Platí následující.*

1. *V každém metrickém prostoru je průnik dvou kompaktních množin kompaktní.*
2. *Existuje topologie $T = \langle T, \tau \rangle$ a kompaktní množiny $A, B \subset T$, že průnik $A \cap B$ není kompaktní.*

Důkaz. 1. Necht' $\langle M, d \rangle$ je metrický prostor, necht' $A, B \subset M$ jsou kompaktní množiny a necht' $(a_n) \subset A \cap B$ je libovolná posloupnost. Protože A je kompaktní a $(a_n) \subset A$, existuje podposloupnost (b_n) posloupnosti (a_n) s $\lim b_n = b \in A$. Protože $(b_n) \subset B$ (Úloha 17) a B je kompaktní, existuje podposloupnost (c_n) posloupnosti (b_n) s $\lim c_n = c \in B$. Zřejmě $c = b \in B \cap A$. Tedy (a_n) má podposloupnost (c_n) (Úloha 18), která má limitu v průniku $A \cap B$.

2. Položme

$$T := \mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

množinu $X \subset T$ zařadíme do τ právě tehdy, když $X \subset \mathbb{N}$ nebo když je $X = \mathbb{N} \cup Y$ pro nějaké $Y \subset \{-\infty, +\infty\}$, a definujeme $A := \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ a $B := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Není těžké ověřit, že $\langle T, \tau \rangle$ je topologie (Úloha 19). Abychom ukázali, že A (i B) je kompaktní, vezměme libovolné otevřené pokrytí

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \in \tau.$$

Potom existuje takový index j v I , že $U_j = \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ nebo $U_j = \mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty\}$, a množina $J = \{j\}$ poskytuje požadované konečné podpokrytí. Podobně je B kompaktní. Na druhé straně $A \cap B = \mathbb{N}$ a

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$$

je otevřeně pokrytí množiny $A \cap B$, které nemá konečné podpokrytí. Tedy množina $A \cap B$ není kompaktní. $\square$

Metrická a topologická kompaktnost se liší ještě jednodušeji v otázce, zda je kompaktní množina uzavřená. Níže ukážeme, že v metrických prostorech to vždy platí. V uvedené topologii T není kompaktní množina A uzavřená, protože její doplněk $\{+\infty\}$ není otevřený; viz však Úlohu 20.

Úloha 17 Proč je $(b_n) \subset B$?

Úloha 18 Proč je (c_n) podposloupností (a_n) ?

Úloha 19 Ukažte, že hypergraf $\langle T, \tau \rangle$ definovaný v důkazu části 2 věty je topologie.

Úloha 20 Dokažte, že v Hausdorffových topologických prostorech jsou kompaktní množiny uzavřené.

Klasické výsledky o metrické kompaktnosti

Vztah mezi úplností a kompaktností je jasný.

Tvrzení 21 Nechť $M = \langle M, d \rangle$ je metrický prostor a nechť $X \subset M$ je kompaktní množina. Pak je X úplná.

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset X$ je Cauchyova. Protože X je kompaktní, existuje podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = b \in X$. Ukážeme, že dokonce $\lim a_n = b$, a tedy že X je úplná. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $d(a_{m_n}, b) \leq \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$ a aby $d(a_m, a_n) \leq \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$. Pak pro každé $n \geq n_0$ TN dává

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{m_n}) + d(a_{m_n}, b) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

protože $m_n \geq n$. $\square$

Úloha 22 Uveďte příklad úplného, ale nekompaktního metrického prostoru.

Navážeme dvěma výsledky o podprostorech.

Tvrzení 23 Každá uzavřená podmnožina kompaktního metrického prostoru je kompaktní množina.

Důkaz. To plyne okamžitě z Úlohy 15 a z Borelovy–Lebesgueovy věty. $\square$

Definice 24 (omezenost) Množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $M = \langle M, d \rangle$ je omezená, existuje-li v M taková koule B , že $X \subset B$.

V následujících třech úlohách je $M = \langle M, d \rangle$ metrický prostor a $X \subset M$ a $A \subset B \subset M$ jsou jeho podmnožiny.

Úloha 25 X je omezená právě tehdy, když existuje taková koule B_M se středem v X , že $X \subset B_M$.

Úloha 26 X je omezená právě tehdy, když existuje reálná konstanta $c > 0$, že $d(x, y) \leq c$ pro všechna $x, y \in X$.

Úloha 27 A je omezená v B právě tehdy, když A je omezená v M .

Tvrzení 28 Nechť $X \subset M$ je kompaktní množina v metrickém prostoru $M = \langle M, d \rangle$. Pak X je uzavřená a omezená množina.

Důkaz. Ekvivalentně dokážeme, že když množina $X \subset M$ není uzavřená nebo není omezená, není kompaktní.

Nechť X není uzavřená. Podle Tvrzení 28 v přednášce 1 pak existuje taková konvergentní posloupnost $(a_n) \subset X$, že $\lim a_n = b \in M \setminus X$. Každá podposloupnost posloupnosti (a_n) má tutéž limitu b . Takže (a_n) nemá žádnou podposloupnost s limitou v X .

Nechť X není omezená. Zvolme libovolný bod $a_1 \in X$ ($X \neq \emptyset$, protože X není omezená). Pro $n = 2, 3, \dots$ nechť je $a_n \in M \setminus B(a_1, n)$ libovolný bod. Tyto body existují, protože X není omezená. Takto získaná posloupnost $(a_n) \subset M$ splňuje $d(a_1, a_n) \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pro spor předpokládejme, že (a_{m_n}) je podposloupnost s $\lim a_{m_n} = b$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $d(a_{m_n}, b) \leq 1$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak pro tatáž n platí

$$d(a_1, a_{m_n}) \leq d(a_1, b) + d(b, a_{m_n}) \leq d(a_1, b) + 1,$$

což je spor. Tedy (a_n) nemá žádnou podposloupnost s limitou. $\square$

Poznamenejme, že v důkazu jsme opět použili *axiom výběru*. Není těžké najít metrický prostor, v němž nelze implikaci v předchozím tvrzení obrátit.

Úloha 29 *Nechť M je libovolný diskrétní metrický prostor s nekonečnou základní množinou M . Pak M je omezená a uzavřená, ale ne kompaktní.*

Uvedenou implikaci ale lze obrátit v eukleidovských metrických prostorech. Než to dokážeme v následující větě, ukážeme, že součin kompaktních metrických prostorů je kompaktní.

Tvrzení 30 *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou dva kompaktní metrické prostory. Pak je také součinnový prostor $P = \langle M \times N, d' \rangle$ kompaktní.*

Důkaz. Nechť $(\bar{c}_n) = (\langle a_n, b_n \rangle) \subset M \times N$ je libovolná posloupnost v P . Dvakrát použijeme předpoklad kompaktnosti a získáme takovou podposloupnost $(\bar{c}_{m_n})$, že $\lim a_{m_n} = a \in M$ a $\lim b_{m_n} = b \in N$. Položme $\bar{c} := \langle a, b \rangle$. Podle Úlohy 31 se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{c}_{m_n} = \bar{c}.$$

Vidíme, že P je kompaktní prostor. □

Úloha 31 *Dokažte, že posloupnost bodů $(\langle a_n, b_n \rangle)$ v součinu dvou metrických prostorů má limitu $\langle a, b \rangle$ právě tehdy, když $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$.*

Věta 32 (kompaktnost v E_n) *Předpokládejme, že množina $X \subset \mathbb{R}^n$ v prostoru E_n je omezená a uzavřená. Pak je X kompaktní.*

Důkaz. Protože je X omezená, pro nějaká dvě reálná čísla $a < b$ je $X \subset [a, b]^n$. Budeme $[a, b]^n$ chápat jako podprostor E_n . Protože je X v E_n uzavřená, Úloha 33 ukazuje, že X je uzavřená i v prostoru $[a, b]^n$. Prostor $[a, b]^n$ je kompaktní podle Tvrzení 30 a Bolzanovy–Weierstrassovy věty známé z MA1 (ta v jazyce MA2 říká, že $[a, b]$ je kompaktní množina v E_1). Protože je X uzavřená množina v kompaktním prostoru $[a, b]^n$, Tvrzení 23 říká, že X je kompaktní množina v $[a, b]^n$. Nakonec Úloha 36 ukazuje, že X je kompaktní množina v $\mathbb{R}^n$. □

Podle této věty a Tvrzení 28 je množina $X \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní v E_n právě tehdy, když je X v E_n omezená a uzavřená.

V následujících čtyřech úlohách je $M = \langle M, d \rangle$ metrický prostor a $A \subset B \subset M$ jsou jeho podmnožiny.

Úloha 33 *Jestliže je A uzavřená v M , pak je A uzavřená v B .*

Úloha 34 Je-li B uzavřená v M a A je uzavřená v B , pak je A uzavřená v M .

Úloha 35 Uved'te příklad prostoru M a jeho podmnožin $A \subset B \subset M$, že A je uzavřená v B , ale A není uzavřená v M .

Úloha 36 A je kompaktní v B právě tehdy, když A je kompaktní v M .

Úlohy 27 a 33–36 se týkají relativnosti vlastností omezenosti, uzavřenosti a kompaktnosti množin v metrických prostorech. Omezenost a kompaktnost jsou absolutní vlastnosti, ale uzavřenost je relativní.

Důsledek 37 Nechť $X \subset M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť M je uzavřená množina v E_n . Potom X je kompaktní množina v eukleidovském podprostoru M právě tehdy, když je X uzavřená a omezená množina v podprostoru M .

Důkaz. Vzhledem k Tvrzení 28 stačí dokázat implikaci $\Leftarrow$. Předpokládejme, že $X \subset M$ je uzavřená a omezená v M . Podle Úlohy 34 je X uzavřená v E_n . Podle Úlohy 27 je X omezená v E_n . Podle Věty 32 je X kompaktní v E_n . Podle Úlohy 36 je X kompaktní v M . $\square$

Definice 38 (stejněměrná spojitost) Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory a nechť $f: M \rightarrow N$ je zobrazení. Zobrazení f je stejněměrně spojité, krátce UC, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro všechna $x, y \in M$ platí

$$d(x, y) \leq \delta \Rightarrow e(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Následující úloha ukazuje rozdíl mezi obyčejnou a stejnoměrnou spojitostí na trochu neobvyklé funkci.

Úloha 39 Nechť $M = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$, což znamená, že M se skládá ze všech racionálních čísel ležících mezi 0 a 1, je eukleidovský prostor. Definujeme zobrazení f z M do E_1 předpisem $f(a) = 0$ pro $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $f(a) = 1$ pro $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ukažte, že zobrazení f je spojité, ale není stejnoměrně spojité.

Uvedeme důležité použití kompaktnosti.

Věta 40 (KOMP $\Rightarrow$ UC) *Nechť $M = \langle M, d \rangle$ a $N = \langle N, e \rangle$ jsou metrické prostory, M je kompaktní a $f: M \rightarrow N$ je spojitě zobrazení. Potom je f stejnoměrně spojitě.*

Důkaz. Pro spor předpokládáme, že f není stejnoměrně spojitě. Což znamená, že existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují takové dva body $a_n, b_n \in M$, že $d(a_n, b_n) \leq n^{-1}$, ale $e(f(a_n), f(b_n)) > \varepsilon$. Díky kompaktnosti prostoru M máme bod $b \in M$ a takové indexy $m_1 < m_2 < \dots$, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_n} = b.$$

Protože f je spojitě v bodě b , existuje díky Větě 27 v přednášce 1 takový index n_0 , že pro každé $n \geq n_0$ je

$$e(f(a_{m_n}), f(b)), e(f(b_{m_n}), f(b)) \leq \varepsilon/2.$$

Pak ale TN dává pro každé $n \geq n_0$ spor:

$$\varepsilon < e(f(a_{m_n}), f(b_{m_n})) \leq e(f(a_{m_n}), f(b)) + e(f(b), f(b_{m_n})) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Opět jsme použili *axiom výběru*. □

Klasické výsledky o topologické kompaktnosti

Soustředíme se sice na metrické prostory, ale výsledky níže platí obecněji v topologiích a mají jednoduché důkazy. Opíráme se ale o zde nedokázanou Borelovu–Lebesgueovu větu, že v metrických prostorech jsou metrická a topologická kompaktnost ekvivalentní.

Tvrzení 41 *$T = \langle T, \tau \rangle$ a $U = \langle U, v \rangle$ buďte topologie, $X \subset T$ buď kompaktní množina v T a $f: T \rightarrow U$ buď spojitá funkce. Pak obraz $f[X]$ je kompaktní množina v U .*

Důkaz. Nechť $f[X] \subset \bigcup_{i \in I} V_i$, kde $V_i \in v$, je otevřené pokrytí množiny $f[X]$. Lehce se vidí, že $X \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}[V_i]$ je pokrytí množiny X otevřenými množinami v T . Protože X je kompaktní, existuje konečná množina indexů $J \subset I$, že stále

$$X \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}[V_i].$$

Snadno plyne, že $f[X] \subset \bigcup_{i \in J} V_i$ je konečné podpokrytí výchozího pokrytí. Vidíme, že $f[X]$ je kompaktní množina. □

Úloha 42 *Ověřte, že toto tvrzení platí i v metrických prostorech.*

Úloha 43 *Dokažte toto tvrzení v metrických prostorech pomocí metrické (sekvenční) kompaktnosti.*

Zavedeme podprostory topologií. Jsou definovány stejným způsobem jako u metrických prostorů. Nechť $T = \langle T, \tau \rangle$ je topologie a $U \subset T$ je neprázdňá podmnožina. Podprostor prostoru T indukovaný množinou U definujeme jako dvojici

$$T|U := \langle U, \{A \cap U : A \in \tau\} \rangle.$$

Úloha 44 *Ukažte, že $T|U$ je topologie na U .*

Úloha 45 *Uzavřené množiny v podprostoru $T|U$ jsou tvořeny právě průniky uzavřených množin v T s U .*

Věta 46 (min-max) *Nechť $T = \langle T, \tau \rangle$ je topologie, $A \subset T$ je neprázdňá kompaktní množina a $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení, které je spojitě vzhledem k T a k eukleidovské metrické topologii na $\mathbb{R}$. Pak existují takové prvky $a, b \in A$, že pro každé $c \in A$ platí*

$$f(a) \leq f(c) \leq f(b).$$

Důkaz. Podle Tvrzení 41 je $f[A]$ kompaktní podmnožina $\mathbb{R}$. Podle Tvrzení 28 (a také Borelovy–Lebesgueovy věty) je $f[A]$ neprázdňá, uzavřená a omezená množina v E_1 . Podle Úlohy 47 existují extrémní prvky $\min(f[A])$ a $\max(f[A])$. Zvolíme-li tedy libovolné body $a, b \in A$ tak, aby $f(a) = \min(f[A])$ a $f(b) = \max(f[A])$, platí uvedené nerovnosti. $\square$

Úloha 47 *Dokažte, že každá neprázdňá, uzavřená a omezená množina v E_1 má minimum i maximum.*

Následující tvrzení souvisí s větou o spojitosti inverzu spojitě prosté funkce (definované na intervalu) známou z předmětu *MA1*. V případě topologických prostorů budeme na inverzní funkci pohlížet jako na zobrazení definované na podprostoru indukovaném obrazem.

Tvrzení 48 *Nechť $T = \langle T, \tau \rangle$ a $U = \langle U, \upsilon \rangle$ jsou topologie, T je kompaktní a U Hausdorffův prostor, a nechť $f: T \rightarrow U$ je spojitá injekce. Pak je inverzní zobrazení*

$$f^{-1}: f[T] \rightarrow T$$

spojité.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pro každou uzavřenou množinu A v T je $f[A]$ uzavřená množina v podprostoru $f[T]$ prostoru U . Podle Úlohy 15 je každá uzavřená množina A v T kompaktní. Podle Tvrzení 41 je $f[A]$ kompaktní v U . Podle Úlohy 20 a předpokladu o U je $f[A]$ uzavřená množina v U . Ale $f[A] = f[A] \cap f[T]$, a tedy podle Úlohy 45 je $f[A]$ uzavřená množina v podprostoru $f[T]$.

Nyní k důkazu spojitosti f^{-1} : podle Úlohy 49 stačí ukázat, že pro každou uzavřenou množinu A v T je

$$(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$$

uzavřená množina v podprostoru $f[T]$. To jsme dokázali na začátku. $\square$

Úloha 49 *Spojitosť zobrazení $f: T \rightarrow U$ mezi topologiemi jsme definovali tak, že pro každou otevřenou množinu v v U je její vzor pomocí f otevřená množina v T . Ukažte, že je ekvivalentní, když se otevřené množiny nahradí uzavřenými.*

Slabě kompaktní množiny aneb „pěkné“ množiny

Definici metrické kompaktnosti zeslabíme následovně. Řekneme, že množina $X \subset M$ v metrickém prostoru $\langle M, d \rangle$ je *pěkná*, má-li každá posloupnost $(a_n) \subset X$ Cauchyovu podposloupnost. Díky metrickým zúplněním jsou pěkné množiny skoro stejně dobré jako množiny kompaktní. Tuto myšlenku dále rozvineme v konečné verzi těchto skript.

Souvislé a nesouvislé množiny a prostory

Připomeňme, že v topologii $\langle T, \tau \rangle$ se množina $X \subset T$ nazývá *obojetná*, pokud je uzavřená i otevřená, tedy jak X tak $T \setminus X$ je v τ . Příklady jsou množiny $\emptyset$ a T .

Definice 50 ((ne)souvislost) Topologie $\langle T, \tau \rangle$ je souvislá, jsou-li jediné obojetné množiny v T jen $\emptyset$ a T . Množina $X \subset T$ je souvislá, je-li podprostor jí indukovaný souvislý. Metrický prostor $\langle M, d \rangle$ je souvislý, je-li jeho metrická topologie souvislá. Množina $X \subset M$ je souvislá, jestliže podprostor jí indukovaný je souvislý. Množiny a prostory, které nejsou souvislé, jsou nesouvislé.

Platí následující kritérium nesouvislosti.

Tvrzení 51 Množina $X \subset T$ v topologii $\langle T, \tau \rangle$ je nesouvislá právě tehdy, když existují takové dvě otevřené množiny $A, B \in \tau$, že

$$X \subset A \cup B \text{ \& } A \cap X \neq \emptyset \neq B \cap X \text{ \& } A \cap B \cap X = \emptyset.$$

Důkaz. Předpokládejme, že X je nesouvislá. Potom podprostor X obsahuje netriviální obojetnou množinu. Tedy existuje $A \in \tau$, že $A \cap X$ se liší od $\emptyset$ i od X a že $X \setminus A$ je otevřená v X . To znamená, že existuje množina $B \in \tau$, že $B \cap X = X \setminus A$. Z toho plyne, že A a B jsou hledané množiny.

Nechť uvedená konjunkce platí. Pak $X \cap A$ a $X \cap B$ jsou netriviální obojetné množiny v podprostoru X . Tedy X je nesouvislá. $\square$

V této situaci říkáme, že A a B *rozřezávají* X .

Úloha 52 Tvrzení 51 platí také s uzavřenými množinami A a B .

Úloha 53 V každé topologii T jsou množiny $\emptyset$ a $\{b\}$, $b \in T$, souvislé.

Topologie T je *totálně nesouvislá*, jsou-li jediné souvislé množiny v T množiny v Úloze 53, tj. je-li každá množina v T s alespoň dvěma prvky nesouvislá.

Důsledek 54 Podprostor $\mathbb{Q}$ prostoru E_1 je *totálně nesouvislý*.

Důkaz. Nechť $X \subset \mathbb{Q}$ je množina obsahující dva prvky $a < b$. Vezměme libovolné iracionální reálné číslo α , že $a < \alpha < b$ (Úloha 55), a uvažujme reálné intervaly $A := (-\infty, \alpha)$ a $B := (\alpha, +\infty)$. Snadno se ověří, že A a B rozřezávají X . $\square$

Úloha 55 Ukažte, že takové číslo α existuje.

Reference

- [1] E. Čech, *Bodové množiny*, Academia, Praha 1966
- [2] M. Hušek, *Metrické prostory*, Matfyzpress, Praha 2024
- [3] I. Netuka, *Základy moderní analýzy*, Matfyzpress, Praha 2015