

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ 2 Z MA 2, 6. 10. 2025

1. Uveďte příklad metrického prostoru (X, d) a posloupnosti otevřených množin $A_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, v něm, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ není otevřená množina.
2. Uveďte příklad metrického prostoru (X, d) a posloupnosti uzavřených množin $A_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, v něm, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ není uzavřená množina.
3. Nechť $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení mezi metrickými prostory (X, d) a (Y, e) a $a \in X$. Definujte, co znamená, že f je spojitě v bodu a .
4. Nechť $f: X_1 \rightarrow X_2$ a $g: X_2 \rightarrow X_3$ jsou zobrazení mezi metrickými prostory (X_i, d_i) , $i = 1, 2, 3$, $a \in X_1$, $b := f(a) \in X_2$, f je spojitě v bodu a a g je spojitě v bodu b . Dokažte, že složené zobrazení $g \circ f = g(f): X_1 \rightarrow X_3$ je spojitě v bodu a .
5. Nechť $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazení z přednášky, tj. $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$ a $f(0, 0) = 0$ (na $\mathbb{R}^2$ a na $\mathbb{R}$ máme euklidovské metriky). Spočítejte $(\partial f / \partial x)(0, 0)$ a $(\partial f / \partial y)(0, 0)$ a ukažte, že f není spojitě v bodu $(0, 0)$.