

PŘÍKLADY NA CVIČENÍ 1 Z MA 2, 29. 9. 2025

Nejprve ale **podmínky udělení zápočtu**: vypracujete $\geq \frac{3}{5}$ z příkladů a zápočtovou písemku, která bude na posledním cvičení, napíšete na $\geq \frac{1}{2}$ bodů. Na každém cvičení, kromě posledního, bude zadáno 5 příkladů (většinou souvisejících s látkou na přednášce), jejichž řešení mi prosím pošlete e-mailem (v čitelné podobě) na adresu `klazar@kam.mff.cuni.cz` do půlnoci následující soboty. Správná řešení pak proberu na cvičení v pondělí.

1. Napište množinovou definici funkce $f: A \rightarrow B$. Co je to definiční obor a obor hodnot funkce? Pro $A' \subset A$ a $B' \subset B$ definujte množiny $f[A']$ a $f^{-1}[B']$.
2. Napište definici (axiomy) metrického prostoru

$$(X, d) .$$

Ukažte, že nezápornost metriky $d \geq 0$ se dá odvodit z ostatních axiomů.

3. Pro reálná čísla $a < b$ označíme jako $\mathcal{R}(a, b)$ množinu těch funkcí $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, které mají na intervalu $[a, b]$ Riemannův integrál, a pro $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ definujeme

$$d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx .$$

Je $(\mathcal{R}(a, b), d)$ metrický prostor?

4. Definujte v metrickém prostoru (X, d) otevřené množiny a koule $B(x, r)$ (ve značení přednášky to je $\Omega(x, r)$) se středem $x \in X$ a poloměrem $r > 0$. Dokažte, že každá koule je otevřená množina.
5. Pro množiny A a B definujte kartézský součin $A \times B$. Dokažte: jsou-li A a B neprázdné, pak platí, že

$$A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A .$$