Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 8, 11. 4. 2024

POUŽITÍ VĚT O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Tři věty o střední hodnotě

Tyto věty popisují vztahy hodnot funkcí a hodnot jejich derivací.

Věta 1 (Rolleova) *Nechť $a < b$, funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f(a) = f(b)$ a v každém bodu $c \in (a,b)$ existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Pak pro nějaké $c \in (a,b)$ se $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Pro konstantní f věta triviálně platí. Nechť pro nějaké c v (a,b) je $f(c) > f(a) = f(b)$ (případ $\ldots < \ldots$ je podobný). Podle věty o minimaxu v přednášce 6 funkce f má v nějakém $c \in [a,b]$ maximum & $c \neq a, b$. Tedy c je OLB $[a,b]$. Derivace $f'(c)$ existuje, takže podle věty 2 v minulé přednášce se $f'(c) = 0$. $\square$

- *Úloha.* Který předpoklad nesplňuje $|x|$ zúžená na $[-1,1]$?

Věta 2 (Lagrangeova) *Nechť $a < b$, funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a v každém bodu $c \in (a,b)$ existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Pak pro nějaké $c \in (a,b)$ se $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Důkaz. Nechť $z = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Funkce $g(x) = f(x) - z(x-a)$ v $\mathcal{C}([a,b])$ splňuje předpoklady věty 1, zejména $g(a) = g(b) = f(a)$. Pro nějaké $c \in (a,b)$ se tak $g'(c) = f'(c) - z = 0$ a $f'(c) = z$. $\square$

Geometricky: graf G_f má tečnu v nějakém bodě $(c, f(c))$, $c \in (a,b)$, rovnoběžnou se sečnou $\kappa(a, f(a), b, f(b))$.

Věta 3 (Cauchyova) *Nechť $a < b$, $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, $g(b) \neq g(a)$ a pro každé $c \in (a,b)$ existují $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(c) \in \mathbb{R}$. Pak existuje $c \in (a,b)$, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c)$.*

Důkaz. Nechť $z = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Funkce $h(x) = f(x) - z(g(x) - g(a))$ v $\mathcal{C}([a,b])$ splňuje předpoklady věty 1, zejména $h(a) = h(b) = f(a)$. Takže $\exists\, c \in (a,b)$ s $h'(c) = f'(c) - zg'(c) = 0$ a $f'(c) = zg'(c)$. $\square$

- *Úloha.* Kde by v důkazu vadily hodnoty $g'(c) = \pm\infty$?

Monotonie funkcí a l'Hospitalova pravidla

- *Vnitřek intervalu.* Pro interval $I \subset \mathbb{R}$ jeho vnitřkem I^0 ($\subset I$) rozumíme otevřený interval vzniklý vynecháním konců intervalu I.

Věta 4 (monotonie 1) *Nechť $f \in \mathcal{C}(I)$, kde I je interval, a pro každé $c \in I^0$ existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$. Pak* (i) *když $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) na I^0, tak f na I neklesá (resp. neroste)* a (ii) *když $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) na I^0, tak f na I roste (resp. klesá).*

Důkaz. Nechť $f' < 0$ na I^0 a $x < y$ jsou v I. Podle věty 2 pro nějaké $z \in (x,y) \subset I^0$ se $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z) < 0$. Z $y - x > 0$ plyne $f(x) > f(y)$ a f na I klesá. Zbývající tři možnosti podobně. $\square$

Tvrzení 5 (monotonie 2) *Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$. Potom* (i) *když $f'_-(b) < 0$, popř. $f'_-(b) > 0$, pak pro $\forall x \in P^-(b,\delta) \cap M$ je $f(x) > f(b)$, popř. $f(x) < f(b)$, a* (ii) *když $f'_+(b) < 0$, popř. $f'_+(b) > 0$, pak pro $\forall x \in P^+(b,\delta) \cap M$ je $f(x) < f(b)$, popř. $f(x) > f(b)$.*

• *Úlohy.* Dokažte toto tvrzení. Dokažte, že když $f \in \mathcal{C}([a,b])$, pro každé $c \in (a,b)$ existuje $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ a všechny vlastní $f'(c) \geq 0$, pak se všechny nevlastní $f'(c) = +\infty$.

• *Limitní rozšiřování derivací.* Derivace limitně rozšíříme.

Důsledek 6 (rozšiřování derivací) *Nechť f, a & b jsou jako ve větě 2. Pak $a, b \in L(D(f))$ & $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$ & $f'(b) = \lim_{x \to b} f'(x)$, když tyto limity existují.*

Důkaz. Pro každé $c \in (a,b)$ je podle věty 2 $(a,c) \cap D(f) \neq \emptyset$ i $(c,b) \cap D(f) \neq \emptyset$, tudíž $a, b \in L(D(f))$. Nechť $\lim_{x \to b} f'(x) = K$ a je dáno ε. Pak existuje δ, že $f'[(b-\delta, b]] \subset U(K, \varepsilon)$. Podle věty 2 pro každé $x \in (b-\delta, b)$ existuje číslo $y \in (x, b)$, že $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(y) \in U(K, \varepsilon)$. Tedy $f'(b) = K$. Podobně pro $f'(a)$. $\square$

• *Dvě l'Hospitalova pravidla.* Jde o výpočty limit $\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)}$ typu $\frac{0}{0}$ či $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ přidáním jmenovatelů $x - A \to 0$. Začneme jednoduchou verzí s obecným definičním oborem.

Věta 7 (LHP 1) *Předpokládejme, že $b \in L(M(f/g))$ a že $f(b) = g(b) = 0$. Pak platí rovnost*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \quad (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Nechť existují derivace $f'(b), g'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f'(b)/g'(b)$ není neurčitý výraz. Pak podle AL funkcí máme, že

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\frac{g(x)-g(b)}{x-b}} = \frac{\lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\lim_{x \to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b}} = \frac{f'(b)}{g'(b)}\,. \qquad \square$$

Např. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{k_1(0)} = \frac{1}{1} = 1$ a $\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1}{x} = \frac{\exp 0}{k_1(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Věta 8 (LHP 2) *Nechť $b < c$, $f, g \in \mathcal{F}((b,c))$, pro každé $x \in (b,c)$ existují $f'(x) \in \mathbb{R}$ & $g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a nechť*
(1) $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$ *nebo*
(2) $\lim_{x\to b} g(x) = \pm\infty$. *Potom*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Zde dokážeme část (1). Část (2) odvodíme později pomocí integrálů. Nechť $\lim_{x\to b} f'(x)/g'(x) = K$ a je dáno ε. Položíme $f(b) = g(b) = 0$. Pak $f, g \in \mathcal{C}([b,c))$. Z věty 1 plyne, že $g \neq 0$ na (b,c). Existuje δ, že $(f'/g')[(b, b+\delta)] \subset U(K,\varepsilon)$. Podle věty 3 pro každé $x \in (b, b+\delta)$ existuje číslo $y \in (b,x)$, že $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \in U(K,\varepsilon)$. Tedy $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = K$. □

Např. $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0}(1/x)\big/(-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\varepsilon x^{-\varepsilon}} = 1/(-\infty) = 0$. Markýz *Guillaume de l'Hospital (1661–1704)* vydal v r. 1696 historicky první učebnici diferenciálního počtu *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*.

• *Úloha.* Ukažte, že věta platí také pro definiční obory (c,b), $P(b,\delta)$ a $U(\pm\infty,\delta)$.

Použití druhých derivací

• *Derivace řádu $k \in \mathbb{N}_0$.* Pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{R}$ definujeme $f^{(0)} = f$ a dále indukcí $f^{(k+1)} = \big(f^{(k)}\big)'$ $(\in \mathcal{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$. Funkci $f^{(k)}$ nazveme k-tou derivací funkce f. Používáme značení: f pro

$f^{(0)}$, f' pro $f^{(1)}$, f'' pro $f^{(2)}$ a f''' pro $f^{(3)}$. Například $(x\sin x)'' = (\sin x + x\cos x)' = 2\cos x - x\sin x$.

- *Úloha.* Určete posloupnosti $\big((\sin x)^{(n)}\big)$ a $\big((1/x)^{(n)}\big)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
- *Druhá derivace a extrémy.* Zde je známé kritérium extrémů.

Tvrzení 9 ($(f')'$ a lok. extrémy) *Nechť $f' \in \mathcal{F}(U(b,\delta))$ a $f'(b) = 0$. Pokud $(f')'(b) < 0$ (resp. $(f')'(b) > 0$), pak f má v b ostré lokální maximum (resp. minimum).*

- *Poznámka.* $f''(b) \in \mathbb{R}$, ale $(f')'(b) \in \mathbb{R}^*$.

Důkaz. Nechť f, b a δ jsou, jak uvedeno, a $(f')'(b) > 0$ (případ, že $(f')'(b) < 0$, je podobný). Podle tvrzení 5 máme $\theta < \delta$, že $f'(x) < 0$ (resp. $f'(x) > 0$) pro každé $x \in P^-(b,\theta)$ (resp. $x \in P^+(b,\theta)$). Podle věty 4 funkce f na $[b-\theta, b]$ klesá a na $[b, b+\theta]$ roste. V b tak má ostré lokální minimum. $\square$

- *Úloha.* Na příkladu ukažte, že v této situaci pro $f''(b) = 0$ funkce nemusí mít v bodu b lokální extrém.
- *Konvexita a konkavita (grafů) funkcí.* Konvexní graf je vydutý směrem dolů, konkávní směrem nahoru.

Definice 10 (konvexní a konkávní) *Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je konvexní (resp. konkávní), když pro $\forall$ prvky $a < b < a'$ v M je $f(b) \le sb + c$ (resp. $f(b) \ge sb + c$), kde $y = sx + c$ je sečna $\kappa(a, f(a), a', f(a'))$. Platí-li tyto neostré nerovnosti jako ostré, mluvíme o ryzí konvexitě, resp. ryzí konkavitě.*

Ryzí konvexita funkce f tedy znamená, že prostřední bod $(b, f(b))$ grafu leží vždy pod sečnou jdoucí oběma krajními body $(a, f(a))$ &

$(a', f(a'))$ na grafu. Pro konvexní f může $(b, f(b))$ ležet i na sečně.

- *Úloha.* Funkce x^2 je ryze konvexní. Funkce $|x|$ je konvexní, ale není ryze konvexní. Funkce $\log x$ je ryze konkávní.
- *Úloha.* (Ryzí) konvexita, resp. (ryzí) konkavita, se zachovává restrikcí funkce.
- *Úloha.* f je (ryze) konvexní $\iff$ $-f$ je (ryze) konkávní.

Věta 11 (existence f'_- a f_+) *Funkce $f \in \mathcal{F}(I)$, jež je konvexní, resp. konkávní, na otevřeném intervalu I, má na I vlastní neklesající, resp. nerostoucí, jednostranné derivace f'_- a f'_+.*

Derivace f' ale nemusí všude existovat, viz $|x|$.

Důsledek 12 *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f \in \mathcal{F}(I)$ je konvexní nebo konkávní. Pak f je spojitá funkce.*

Věta 13 (opět $(f')'$) *Nechť $f \in \mathcal{C}(I)$, kde I je interval, $D(f) \supset I^0$ a pro každé $x \in I^0$ existuje $(f')'(x) \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou-li všechny tyto hodnoty derivace $(f')'$ nezáporné (kladné), f je (ryze) konvexní. Jsou-li všechny nekladné (záporné), f je (ryze) konkávní.*

- *Úloha.* Dokažte následující lemma.

Lemma 14 (o sklonech) *Nechť (a, a'), (b, b') a (c, c') jsou v $\mathbb{R}^2$, $a < b < c$ & $\frac{b'-a'}{b-a} \le \frac{c'-b'}{c-b}$. Pak bod (b, b') leží pod přímkou $\kappa(a, a', c, c')$ či na ní. Analogické tvrzení platí, když nerovnost $\le$ nahradíme nerovností $<$ nebo $\ge$ nebo $>$.*

Důkaz věty 13. Nechť f a I jsou, jak uvedeno, a nechť $(f')' \geq 0$ na I^0, další tři případy se řeší podobně. Nechť $a < b < c$ jsou v I. Podle věty 2 existují čísla $y \in (a, b)$ a $z \in (b, c)$, že

$$s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(y) \ \text{ a } \ t = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = f'(z) \ .$$

Podle věty 4 f' na I^0 neklesá, protože $(f')' \geq 0$. Z $y < z$ plyne, že $s = f'(y) \leq f'(z) = t$. Podle lemmatu 14 bod $(b, f(b))$ leží pod $\kappa(a, f(a), c, f(c))$ či na ní. Podle definice 10 je f konvexní. $\square$

- *Inflexní body.* V nich graf funkce kříží tečnu.

Definice 15 (inflexní body) *Funkce f je v $\mathcal{F}(M)$, ℓ je tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$ a číslo b je* OLB *množiny M. Když existuje δ, že pro každé x v $P^-(b, \delta) \cap M$ a y v $P^+(b, \delta) \cap M$ leží bod $(x, f(x))$ pod přímkou ℓ či na ní a bod $(y, f(y))$ nad ℓ či na ní, nebo tomu pro každé x a y je naopak, nazveme $(b, f(b))$ inflexním bodem grafu.*

- *Úloha.* Počátek $(0, 0)$ je inflexním bodem grafu funkce x^3.

Tvrzení 16 (není tu inflexe) *Nechť je $f' \in \mathcal{F}(U(b, \delta))$ a $(f')'(b) \neq 0$. Pak $(b, f(b))$ není inflexním bodem G_f.*

Důkaz. Nechť $(f')'(b) > 0$, případ, že $(f')'(b) < 0$, je podobný. Nechť ℓ je tečna ke G_f v $(b, f(b)$. Podle tvrzení 5 existuje $\theta \leq \delta$, že pro každé $x \in P^-(b, \theta)$ a každé $x' \in P^+(b, \theta)$ je

$$f'(x) < f'(b) < f'(x') \, . \tag{1}$$

Nechť $x \in P^-(b, \theta)$, $x' \in P^+(b, \theta)$ a s a t jsou po řadě sklony sečen

$$\kappa(x,\ f(x),\ b,\ f(b)) \ \text{ a } \ \kappa(b,\ f(b),\ x',\ f(x'))$$

grafu G_f. Nerovnosti (1) a věta 2 dávají, že $s < f'(b) < t$. Tedy oba body $(x, f(x))$ a $(x', f(x'))$ leží nad ℓ. Podmínka v definici 15 není splněna. $\square$

Postačující podmínku pro inflexní bod uvedeme bez důkazu.

Věta 17 (je tu inflexe) *Nechť $f'' \in \mathcal{F}(U(b, \delta))$, $f''(b) = 0$, a buď $f'' \geq 0$ na $P^-(b, \delta)$ a $f'' \leq 0$ na $P^+(b, \delta)$, anebo tomu je naopak. Pak $(b, f(b))$ je inflexním bodem G_f.*

Asymptoty

K asymptotickým přímkám se graf funkce neomezeně přimyká.

Definice 18 (svislé asymptoty) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, b je v $L^-(M)$ a $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$. Přímku $x = b$ pak nazveme levou svislou asymptotou funkce f. Pravé svislé asymptoty definujeme podobně.*

- *Úloha.* Osa y je levou i pravou svislou asymptotou funkce $1/x$ a je pravou svislou asymptotou funkce $\log x$.

Definice 19 (asymptoty v $\pm\infty$) *Nechť f je v $\mathcal{F}(M)$, $+\infty \in L(M)$ a $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - sx - b) = 0$. Přímka $y = sx + b$ pak je asymptota funkce f v $+\infty$. Asymptoty v $-\infty$ definujeme podobně.*

- *Úloha.* Přímka $y = sx + b$ je asymptota funkce f v $+\infty \iff \lim_{x \to +\infty} f(x)/x = s$ a $\lim_{x \to +\infty}(f(x) - sx) = b$. Analogicky pro asymptoty v $-\infty$.
- *Úloha.* Nalezněte asymptoty funkce $1/x$ v $+\infty$ i v $-\infty$.

Průběhy grafů elementárních funkcí

Zaměříme se na třídu elementárních funkcí (EF). Podle níže uvedeného postupu lze ovšem zkoumat i grafy obecných funkcí, jako je třeba $\operatorname{sgn} x$ ($\notin$ EF). Jak víme ze 4. přednášky, EF se dostanou z OZEF, to jest z funkcí e^x, $\log x$, $\sin x$, $\arcsin x$, konstanty k_c pro $c \in \mathbb{R}$ a funkce x^b pro $b \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, sčítáním, násobením, dělením a skládáním.

• *Zjištění průběhu grafu elementární funkce.* Je tedy dána funkce $F \in \mathcal{R}$, konkrétněji $F \in$ EF.

1. *Určíme definiční obor $M(F)$.* Pro elementární F vyjdeme z definičních oborů $M(\mathrm{e}^x) = M(\sin x) = M(k_c) = \mathbb{R}$, $M(x^b) = [0, +\infty)$, $M(\log x) = (0, +\infty)$ a $M(\arcsin x) = [-1, 1]$. Potom použijeme relace $M(f + g) = M(fg) = M(f) \cap M(g)$, $M(f/g) = M(f) \cap M(g) \setminus Z(g)$ a $M(f(g)) = \{x \in M(g) \mid g(x) \in M(f)\}$.

2. *Není funkce F speciálního tvaru?* <u>Sudá</u> ($F(-x) = F(x)$), <u>lichá</u> ($F(-x) = -F(x)$), <u>c-periodická</u> ($F(c + x) = F(x)$), ...?

3. *Derivace a spojitost.* Určíme $\{a \in M(F) \mid \exists\, F'(a) \in \mathbb{R}^*\}$. Pokud $F \notin$ EF, určíme $\{a \in M(F) \mid F$ je spojitá v $a\}$ (EF $\subset \mathcal{C}$).

4. *Jednostranné limity.* V bodech, kde F je nespojitá, a v prvcích množiny $L(M(F)) \setminus M(F)$ nalezneme jednostranné limity F. Např. $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$.

5. *Průsečíky s osami a obraz.* Určíme průsečíky grafu G_F s osami x a y, tj. $\{x \in M(F) \mid F(x) = 0\}$ a $F(0)$. Určíme $F[M(F)]$.

6. *Jednostranné derivace.* V bodech $a \in M(F)$, kde $F'(a)$ neexistuje, spočteme jednostranné derivace $F'_-(a)$ a $F'_+(a)$. Může při tom pomoci důsledek 6. Např. $(|x|)'_-(0) = -1$ a $(|x|)'_+(0) = 1$.

7. *Intervaly monotonie a extrémy.* Pomocí věty 4 určíme v $M(F)$ maximální intervaly monotonie funkce F a najdeme její lokální a globální extrémy.

8. *Konvexita a konkavita.* Pomocí věty 13 určíme v $M(F)$ maximální intervaly konvexity a konkavity funkce F.

9. *Inflexní body.* Pomocí tvrzení 16 a věty 17 nalezneme inflexní body grafu G_F.

10. *Asymptoty.* Nalezneme asymptoty funkce F.

11. *Náčrt grafu.* Rukou, počítačem, Internetem, ... načrtneme graf G_F funkce F.

• *První příklad.* Nechť $\underline{F(x) = \tan x = (\sin x)/(\cos x)\ (\in \mathrm{EF})}$.

1. $M(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2}) = \mathbb{R} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

2. $F(x)$ je π-periodická funkce, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ a $\cos(\pi + x) = -\cos x$. Je to lichá funkce, protože sinus je lichý a kosinus sudý.

3. $F \in \mathcal{C}$, protože $F \in \mathrm{EF}$, a $D(F) = M(F)$.

4. Pro $n \in \mathbb{Z}$ nechť $b_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$. Pak $\lim_{x\to b_n^-} F(x) = +\infty$ a $\lim_{x\to b_n^+} F(x) = -\infty$. Limity funkce F v $\pm\infty$ neexistují.

5. G_F protíná osu y v $(0,0)$ a osu x v bodech $(b_n - \frac{\pi}{2}, 0) = (\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Díky spojitosti f (nabývání mezihodnot) a hořejším nekonečným limitám je jasné, že $F[M(F)] = F[\,(b_n - \pi,\ b_n)\,] = \mathbb{R}$.

6. $D(F) = M(F)$, není co počítat.

7. Protože $F'(x) = 1/\cos^2 x > 0$ na $M(F)$, funkce F na každém intervalu $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2})$ roste. Vzhledem k tomu a vzhledem ke své periodičnosti funkce F nemá žádné extrémy.

8. $F''(x) = (2\sin x)/(\cos^3 x) \in \mathcal{F}(M(F))$. Protože $F'' < 0$ na $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n)$ a $F'' > 0$ na $(\pi n, \pi n + \frac{\pi}{2})$, funkce F je na $(\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n]$ ryze konkávní a na $[\pi n, \pi n + \frac{\pi}{2})$ ryze konvexní.

9. Vzhledem k $F''(x) = 0 \iff x = \pi n$ a k hořejšímu znaménku funkce F'' jsou inflexní body právě $(b_n - \frac{\pi}{2}, 0) = (\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

10. Vzhledem k limitám v části 4 je každá přímka $x = b_n = \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, levá i pravá svislá asymptota funkce F. Ta nemá asymptotu ani v $-\infty$ ani v $+\infty$.

11. Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

• *Druhý příklad.* Podle skript R. Černý a M. Pokorný, *Základy matematické analýzy pro studenty fyziky* 1, MatfyzPress, Praha 2020, str. 193–194: $\underline{F(x) = \arcsin\big(2x/(1+x^2)\big)\ (\in \mathrm{EF})}$.

1. $M(F) = \mathbb{R}$, protože $M(\arcsin x) = [-1, 1]$ a $2|x| \le 1 + x^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ díky $x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2 \ge 0$.

2. $F(x)$ je lichá funkce, protože $\sin x$, $\arcsin x$ a $\frac{2x}{1+x^2}$ jsou liché funkce. Není periodická.

3. $F \in \mathcal{C}$, protože $F \in \mathrm{EF}$. Vzorce pro derivaci arkus sinu, složené funkce a podílu dávají, že na

$$D(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{2x}{1+x^2} \ne \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = M(F) \setminus \{-1, 1\}$$

se

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x/(1+x^2))^2}} \cdot \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{(1-x^2)/(1+x^2)^2}{|(1-x^2)/(1+x^2)|} = 2 \cdot \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{2 \cdot \mathrm{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}\,. \end{aligned}$$

V bodu 6 uvidíme, že ani v -1 ani v 1 F nemá derivaci.

4. Patrně $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \arcsin 0 = 0$, protože $\frac{2x}{1+x^2} \to 0$ pro $x \to \pm\infty$.

5. G_F protíná obě osy právě a jen v počátku, v bodě $(0,0)$. Za chvilku zjistíme, že $F[M(F)] = F[\mathbb{R}] = [-\pi/2, \pi/2]$.

6. Patrně $\lim_{x\to 1^\pm} F'(x) = \mp 1$ a podle důsledku 6 se $F'_\pm(1) = \mp 1$. Vzhledem k lichosti F se $F'_\pm(-1) = \pm 1$.

7. Protože $F' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $F' > 0$ na $(-1, 1)$ a $F' < 0$ na $(1, +\infty)$, podle věty 4 F na $(-\infty, -1]$ klesá, na $[-1, 1]$ roste a na $[1, +\infty)$ klesá. Též $F(x) < 0$ pro $x < 0$ a $F(x) > 0$ pro $x > 0$ (a $F(0) = 0$). Podle těchto intervalů monotonie a znamének a podle nulových limit výše vidíme, že F má v $x = -1$ ostré globální minimum s hodnotou $F(-1) = -\pi/2$, že v $x = 1$ má symetricky (díky lichosti) ostré globální maximum s hodnotou $F(1) = \pi/2$ a že nemá žádné další lokální extrémy. Z těchto extrémů a spojitosti F (nabývání mezihodnot) plyne výše uvedený obraz $F[M(F)]$.

8. Druhá derivace se na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ rovná

$$F''(x) = \frac{-4x \cdot \mathrm{sgn}(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}\ .$$

Protože $F'' < 0$ na $(-\infty, -1)$, $F'' > 0$ na $(-1, 0)$, $F'' < 0$ na $(0, 1)$ a $F'' > 0$ na $(1, +\infty)$, podle věty 13 je F na $(-\infty, -1]$ ryze konkávní, na $[-1, 0]$ ryze konvexní, na $[0, 1]$ ryze konkávní a na $[1, +\infty)$ ryze konvexní.

9. Vzhledem k $F''(x) = 0 \iff x = 0$ (druhé derivace $F''(\pm 1)$ neexistují) a k hořejším znaménkům F'' je podle tvrzení 16 a věty 17 bod $(0, 0)$ jediný inflexní bod funkce F (v bodech $(-1, F(-1))$ a $(1, F(1))$ neexistují tečny).

10. Vzhledem k limitám v části 4 je $y = 0 = 0x + 0$ asymptotou funkce F v $-\infty$ i v $+\infty$. Nemá svislé asymptoty.

11. Náčrt grafu: `https://www.desmos.com/calculator`.

DĚKUJI ZA POZORNOST!