Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 7, 4. 4. 2024

DERIVACE FUNKCÍ

Derivace a lokální extrémy

• *Bodová derivace funkce.* Zesiluje bodovou spojitost.

Definice 1 (derivace v bodu) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in M \cap L(M)$. Derivace funkce f v bodu b je limita*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \; (\in \mathbb{R}^*)\,.$$

Značíme ji $f'(b)$ nebo $(df/dx)(b)$.

• *Úloha.* Jak plyne rovnost $(*)$ z věty o limitě složené funkce?

Když $f'(b) \in \mathbb{R}$, pak f je v bodu b diferencovatelná. Pro $x \in M$ pak máme aproximaci

$$f(x) = \underbrace{f(b) + f'(b) \cdot (x - b)}_{\text{lineární funkce v } x} \;+\; \underbrace{o(x - b)}_{\text{chyba aproximace}} \quad (x \to b)\,.$$

• *Jednostranné derivace.* Definujeme je pomocí jednostranných limit. Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in L^-(M) \cap M$. Potom limitu $f'_-(b) = \lim_{x \to b^-}(f(x) - f(b))/(x - b)$ $(\in \mathbb{R}^*)$ nazveme levou derivací (či derivací zleva) funkce f v bodu b. Podobně pro pravou derivaci (či derivaci zprava) $f'_+(b)$.

• *Úlohy.* $f'(a) = L \Rightarrow f'_-(a) = L$ nebo $f'_+(a) = L$. $f'_-(a) = f'_+(a) = L \Rightarrow f'(a) = L$. $f'_-(a) = K \neq L = f'_+(a) \Rightarrow f'(a)$ neexistuje.

• *Derivace a extrémy.* Připomeňme si, že $a \in \mathbb{R}$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, krátce OLB, pokud pro každé δ je $P^-(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$ i $P^+(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$. Množinu OLBů množiny $M \subset \mathbb{R}$ označíme jako $L^{\pm}(M)$.

• *Úloha.* Každý OLB množiny M je jejím limitním bodem. Naopak to obecně neplatí.

Zde je známá nutná podmínka existence lokálního extrému.

> **Věta 2 (extrémy a derivace)** *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M$ je* OLB *množiny M. Nechť $\exists\, f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a $f'(b) \neq 0$. Pak funkce f nemá v b lokální extrém – pro každé δ existují body $c, d \in U(b,\delta) \cap M$, že $f(c) < f(b) < f(d)$.*

Důkaz. Nechť f, M a b jsou, jak je uvedeno, a je dáno δ. Nechť $f'(b) < 0$, případ s $f'(b) > 0$ je podobný. Vezmeme tak malé ε, že každé $y \in U(f'(b), \varepsilon)$ je záporné. Podle definice 1 existuje θ, že

$$x \in P(b,\,\theta) \cap M \Rightarrow D = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \in U(f'(b),\,\varepsilon) \Rightarrow D < 0\ .$$

Pro $x < b$ je $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a $D < 0$. Podobně pro $x > b$ je $f(x) < f(b)$. Búno $\theta \leq \delta$. Vezmeme jakékoli

$$c \in P^+(b,\,\theta) \cap M \ \text{ a } \ d \in P^-(b,\,\theta) \cap M\ .$$

Prvky c a d existují díky tomu, že b je OLB množiny M. Platí, že $c, d \in U(b,\delta) \cap M$ a $f(c) < f(b) < f(d)$. □

• *Úloha.* Funkce $f(x) = x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ má v 0 ostré globální minimum a v 1 ostré globální maximum. Současně má nenulové derivace $f'(0) = f'(1) = 1$. Není to v rozporu s větou 2?

Takže má-li funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ v bodu $b \in M$ lokální extrém, pak platí, že $b \notin L^{\pm}(M)$ nebo $f'(b)$ neexistuje nebo $f'(b) = 0$. To je nutná podmínka existence lokálního extrému.

Derivace a spojitost

Diferencovatelnost funkce je silnější vlastnost, než spojitost.

Tvrzení 3 (derivace a spojitost) *Když existuje vlastní derivace $f'(b) \in \mathbb{R}$, pak f je v bodu $b \in M(f)$ spojitá.*

Důkaz. Takže i $b \in L(M(f))$. Podle AL funkcí máme, že

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to b} f(x) &= \lim_{x \to b} \left(f(b) + (x-b) \cdot \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right) \\
&= \lim_{x \to b} f(b) + \lim_{x \to b} (x-b) \cdot \lim_{x \to b} \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \\
&= f(b) + 0 \cdot f'(b) = f(b)\ .
\end{aligned}$$

Podle tvrzení 4 v páté přednášce je f v b spojitá. □

- *Úloha.* Modifikujte tvrzení 3 pro jednostranné derivace.
- *Úloha.* Dokažte, že $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$. Existence nevlastní derivace tedy neimplikuje spojitost funkce v daném bodě.
- *Úloha.* Dokažte, že $(|x|)'_-(0) = -1$ a $(|x|)'_+(0) = +1$. Takže $(|x|)'(0)$ neexistuje. Spojitost funkce v bodu nezaručuje existenci derivace.

Příklady derivací

- *Odmocnina.* Zderivujeme $\sqrt{x} \in \mathcal{F}([0, +\infty))$. Pro $a \geq 0$ se

$$(\sqrt{x})'(a) = \lim_{x \to a} \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \tfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \tfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\ .$$

Takže $(\sqrt{x})'(a) = 1/(2\sqrt{a})$ pro $a > 0$ a $(\sqrt{x})'(0) = +\infty$.

- *Úloha.* Spočítejte $(\sqrt{x})'_+(0)$ a $(\sqrt{x})'_-(0)$.
- *Úloha.* Spočítejte derivace konstantních funkcí: $(k_c)' = k_0$, $c \in \mathbb{R}$.
- *n-tá mocnina.* Nechť $n \in \mathbb{N}$. Zderivujeme funkci $f(x) = x^n$ $(\in \mathcal{F}(\mathbb{R}))$. Derivace je $f'(x) = nx^{n-1}$, protože pro $a \in \mathbb{R}$ se

$$\begin{aligned}
\big(x^n\big)'(a) &= \lim_{x\to a} \tfrac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \tfrac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} x^{n-1} + \lim_{x\to a} x^{n-2}a + \cdots + \lim_{x\to a} a^{n-1} \\
&= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1}}_{n \text{ sčítanců}} = na^{n-1} \,.
\end{aligned}$$

Předposlední a předpředposlední rovnost platí díky AL funkcí.

Derivace jako unární operace na $\mathcal{R}$

Připomínáme, že $\mathcal{R} = \{f \mid f\colon M \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}\}$.

> **Definice 4 (derivace funkce)** *Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ položíme $D(f) = \{x \in M \mid \exists\, f'(x) \in \mathbb{R}\}$ $(\subset L(M) \cap M)$. Funkci $f'\colon D(f) \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f'(a) = (df/dx)(a)$ nazveme derivací (funkce f).*

Např. pro $\sqrt{x} \in \mathcal{F}([0, +\infty))$ se $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x}) \in \mathcal{F}((0, +\infty))$. Podle tvrzení 3 pro každou funkci $f \in \mathcal{R}$ je $f \mid D(f) \in \mathcal{C}$.

Nespojitá derivace

Sestrojíme funkci $f \in \mathcal{R}$ s $f' \notin \mathcal{C}$. Nechť $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > 0$ mají $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $a_n - b_n = o(b_n)$ $(n \to +\infty)$. Nechť $N = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n, a_n)$ a funkce $f \in \mathcal{F}(N)$ má hodnoty $f(0) = 0$ a $f(x) = x - b_n$ pro $x \in (b_n, a_n)$.

> **Tvrzení 5 (nespojitá derivace)** *Derivace $f' \in \mathcal{F}(N)$ je nespojitá, protože $f'(0) = 0$, jinde $f'(x) = 1$ a $0 \in L(N)$.*

Důkaz. Pro $x \in (b_n, a_n)$ snadno máme, že $f'(x) = (x - b_n)' = 1$. Ovšem $f'(0) = \lim_{x \to 0} f(x)/x = 0$, protože pro $x \in (b_n, a_n)$ je $|f(x)/x| \le (a_n - b_n)/b_n \to 0$ (pro $n \to \infty$). Také $0 \in L(N)$. $\square$

Standardní tečny

Definujeme tečnu ke grafu funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ v jeho bodu $(b, f(b))$. Graf funkce f je množina bodů v rovině $G_f = \{(x,\ f(x)) \mid x \in M\}$ $(\subset \mathbb{R}^2)$. Podle naší definice funkce se f a G_f prakticky rovnají.

Definice 6 (standardní tečna) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ je diferencovatelná v b $(\in M \cap L(M))$. Tečnou k jejímu grafu v bodě $(b, f(b))$ rozumíme přímku $\ell \subset \mathbb{R}^2$ danou rovnicí*

$$y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b) \quad (x \in \mathbb{R})\ .$$

Je to přímka se sklonem $f'(b)$, která prochází bodem $(b, f(b))$.

Limitní tečny

O tečnách slýcháme, že jsou nějakými limitami sečen, ale už se nikdy přesně neřekne jakými. Pojďme to teď říci.

• *Nesvislé přímky.* Lehce se vidí, že každá nesvislá přímka $\ell \subset \mathbb{R}^2$ má jednoznačné vyjádření $\ell = \{(x, sx + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $s, b \in \mathbb{R}$, kde s je její sklon. Platí více, funkce $p\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^2$ daná jako

$$\mathcal{N} \ni \ell \mapsto p(\ell) = (p_1(\ell),\ p_2(\ell)) = (s,\ b) \in \mathbb{R}^2$$

je bijekce mezi množinou $\mathcal{N}$ všech nesvislých přímek a $\mathbb{R}^2$.

Definice 7 (limity v $\mathcal{N}$) *Pro $(\ell_n) \subset \mathcal{N}$ a $\ell \in \mathcal{N}$ píšeme $\lim \ell_n = \ell$, pokud $\lim p_1(\ell_n) = p_1(\ell)$ a $\lim p_2(\ell_n) = p_2(\ell)$.*

• *Úloha.* Dokažte, že pro každé dva body $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$, kde $a \neq a'$, existuje jediná přímka ℓ v $\mathcal{N}$, že $(a,b) \in \ell$ i $(a',b') \in \ell$.

Tuto přímku $\underline{\ell \text{ označíme jako } \kappa(a,b,a',b')}$.

Definice 8 (limitní tečna) *$f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Pokud pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$ platí podle definice 7 limita přímek*

$$\lim \kappa(b,\ f(b),\ a_n,\ f(a_n)) = \ell\,,$$

nazveme ℓ limitní tečnou ke G_f v bodu $(b, f(b))$.

Tato definice tečny v bodu $(b, f(b))$ nepotřebuje derivaci $f'(b)$.

• *Úloha.* Když ℓ je limitní tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$, pak $(b, f(b)) \in \ell$.

• *Ekvivalence obojích tečen.* Standardní a limitní tečny splývají.

Věta 9 (standardní $\iff$ limitní) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Přímka ℓ je tečna ke G_f v bodu $(b, f(b)) \iff \ell$ je limitní tečna.*

Důkaz. Viz **K**. $\square$

• *Tečna v nepřítomném bodu.* Tečnu ke grafu funkce v jeho bodu lze definovat dokonce i bez použití tohoto bodu.

Věta 10 (tečna v nepřítomném bodu) *Nechť* $b \in M$ *je* OLB *množiny* $M \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(M \setminus \{b\})$ *a* $\ell \in \mathcal{N}$. *Pak* f *lze rozšířit hodnotou* $f(b) \in \mathbb{R}$ *tak, že přímka* ℓ *je tečna ke* G_f *v bodu* $(b, f(b)) \iff$ *pro každé dvě posl.* $(x_n), (y_n) \subset M$ *splňující, že* $x_n < b < y_n$ *a* $\lim x_n = \lim y_n = b$, *podle definice 7 platí limita přímek* $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$.

Důkaz je v **K**.

Aritmetika derivací

• *Lineární kombinace.* Zderivujeme lineární kombinace funkcí. Dovolíme i nevlastní hodnoty derivací.

Tvrzení 11 (derivace lin. kombinace) *Nechť funkce* f *a* g *jsou v* $\mathcal{F}(M)$, $f'(c) \in \mathbb{R}^*$ *a* $g'(c) \in \mathbb{R}^*$. *Pak platí rovnost* $(af + bg)'(c) = af'(c) + bg'(c)$, *když výraz vpravo není neurčitý.*

Důkaz. Nechť $h = af + bg$. Pak $h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = a \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + b \lim_{x \to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = af'(c) + bg'(c)$. □

Např. $(\mathrm{sgn}(x) + \sqrt{x})'(0) = \mathrm{sgn}'(0) + (\sqrt{x})'(0) = +\infty + (+\infty) = +\infty$ ($\mathrm{sgn}\, x$ tu má definiční obor $[0, +\infty)$).

• *Úloha.* $(\mathrm{sgn}(x) - \sqrt{x})'(0) =?$

Důsledek 12 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$) *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}$ & *funkce* f *a* g *jsou v* $\mathcal{F}(M)$. *Pak* $(af + bg)' \supset af' + bg'$.

• *Úlohy.* Dokažte to podrobně. Uveďte příklad ostré inkluze. Co se stane, když funkce f a g nemají společný definiční obor?

• *Součiny a podíly.* Dokážeme známý Leibnizův vzorec.

Věta 13 (derivace součinu) *$f, g \in \mathcal{F}(M)$, $f'(b) \in \mathbb{R}^*$, $g'(b) \in \mathbb{R}^*$, f či g je spojitá v b. Pak platí rovnost $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$, když výraz vpravo není neurčitý.*

Důkaz. Nechť je funkce g spojitá v b, pro spojitou f postupujeme podobně (viz úloha). Podle předpokladů a podle AL funkcí se $(fg)'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(x) - f(b)g(b)}{x - b}$ rovná

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \to b} \frac{(f(x) - f(b))g(x) + f(b)(g(x) - g(b))}{x - b} \\
&= \lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot \lim_{x \to b} g(x) + f(b) \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} f'(b)g(b) + f(b)g'(b)\ .
\end{aligned}$$

□

• *Úloha.* Převeďte jednoduše případ spojité f na případ spojité g.

• *Úloha.* Spojitost nelze pominout. Nechť $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, kde pro $x \neq 0$ je $f(x) = -g(x) = \operatorname{sgn} x$, $f(0) = -\frac{1}{2}$ a $g(0) = \frac{1}{2}$. Ukažte, že pro $b = 0$ se PS Leibnizova vzorce rovná $(+\infty) \cdot \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\infty) = +\infty$, ale levá strana neexistuje.

Důsledek 14 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$) *Nechť funkce f a g jsou v $\mathcal{F}(M)$. Pak $(fg)' \supset f'g + fg'$.*

• *Úlohy.* Dokažte to podrobně. Uveďte příklad ostré inkluze. Co se stane, když funkce f a g nemají společný definiční obor?

Tvrzení 15 (derivace podílu) *Nechť f, g jsou v $\mathcal{F}(M)$, $f'(b) \in \mathbb{R}^*$, $g'(b) \in \mathbb{R}^*$ a g je spojitá v b. Pak platí rovnost*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}\ ,$$

když výraz vpravo není neurčitý.

Důkaz. Z předpokladů a AL funkcí plyne, že derivace $(f/g)'(b) = \lim_{x\to b} \frac{f(x)/g(x) - f(b)/g(b)}{x-b}$ se rovná

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to b} \frac{f(x)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(b) - f(b)g(x)}{g(x)g(b)(x-b)} = \\
&\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \lim_{x\to b} \frac{g(b)}{g(x)g(b)} - \lim_{x\to b} \frac{f(b)}{g(x)g(b)} \lim_{x\to b} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \\
&\overset{g \text{ je spoj. v } b}{=} \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}\ .
\end{aligned}$$

□

I tento vzorec obecně pro nespojitý jmenovatel neplatí.

Důsledek 16 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$) *Nechť funkce f a g jsou v $\mathcal{F}(M)$. Pak $(f/g)' \supset (f'g - fg')/g^2$.*

• *Úlohy.* Dokažte to podrobně. Uveďte příklad ostré inkluze. Co se stane, když funkce f a g nemají společný definiční obor?

Složené funkce a inverzy

Důkazy dvou následujících vět a jednoho důsledku jsou v **K**.

Věta 17 (derivace složeniny) *Nechť $M = M(f(g))$, bod $b \in M \cap L(M)$, $g'(b) \in \mathbb{R}^*$, g je spojitá v b a $f'(g(b))$ je v $\mathbb{R}^*$. Pak $(f(g))'(b) = f'(g(b)) \cdot g'(b)$, když výraz vpravo není neurčitý.*

Důsledek 18 ($'$ jako operace na $\mathcal{R}$) *Nechť funkce f a g jsou v $\mathcal{R}$ a $g[M(g)] \subset M(f)$. Pak $(f(g))' \supset f'(g) \cdot g'$.*

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ roste, resp. klesá, v bodě $b \in M$, existuje-li δ, že pro každé x a x' s $b - \delta < x < b$ a $b < x' < b + \delta$ je $f(x) < f(b) < f(x')$, resp. $f(x) > f(b) > f(x')$. Zderivujeme inverzní funkci.

Věta 19 (derivace inverzu) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ je prostá funkce, $f'(b) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce f^{-1} je spojitá v bodě $c = f(b)$. Pak platí následující.*

1. *Když $f'(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{f'(b)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}$.*
2. *Když $f'(b) = 0$ a funkce f v bodě b roste, resp. klesá, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = +\infty$, resp. $-\infty$.*
3. *Když $f'(b) = \pm\infty$ a $c \in L(f[M])$, pak $\left(f^{-1}\right)'(c) = 0$.*

Derivace funkcí $\exp x$, $\cos x$ a $\sin x$

• *Derivace mocninných řad.* Tyto funkce definované mocninnými řadami (ve čtvrté přednášce) teď zderivujeme.

Věta 20 (derivace moc. řad) *Nechť posl.* $(a_0, a_1, \dots) \subset \mathbb{R}$ *má* $\lim |a_n|^{1/n} = 0$. *Pak řada* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *absolutně konverguje pro každé číslo* $x \in \mathbb{R}$ *a její derivace* $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n =: T(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť a_n, S a T jsou, jak uvedeno, a $x, c \in \mathbb{R}$ s $c \neq 0$. Z věty 19 minule víme, že $S, T \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ($\lim (n+1)^{1/n} = 1$). Odhadneme $U = \left|\frac{1}{c}(S(x+c) - S(x)) - T(x)\right|$. S $y = 1 + |c| + |x|$ je U

$$\begin{aligned}
&\leq \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot \left| \sum_{j=0}^{n} (x+c)^j x^{n-j} - (n+1) x^n \right| \\
&\leq |c| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} y^{i-1} y^{n-i} \\
&\leq |c| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot y^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} 2^j \leq |c| \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| (2y)^{n+1} \,,
\end{aligned}$$

což jde k 0 pro $c \to 0$. Tedy $S'(x) = \lim_{c \to 0} (S(x+c) - S(x))/c = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = T(x)$. □

- *Úloha.* Podrobně vysvětlete odhad veličiny U.

- *Exponenciála, kosinus a sinus.* Podle věty 20 tyto funkce mají na $\mathbb{R}$ derivace

$$\begin{aligned}
(\exp x)' &= \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} x^n/n!\right)' = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp x \,, \\
(\cos x)' &= \left(\textstyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!} \\
&= -\sin x \text{ a} \\
(\sin x)' &= \left(\textstyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)' = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x \,.
\end{aligned}$$

Derivace základních elementárních funkcí (ZEF)

• *Logaritmus.* Pro $x > 0$ část 1 věty 19 dává $(\log x)' = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$. Pro $x < 0$ ovšem podle věty 17 též $(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Celkem $(\log |x|)' = 1/x$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• *Funkce x^b pro $b \in \mathbb{R}$.* Pro $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ díky derivaci exponenciály, logaritmu a větě 17 máme, že $\big(x^b\big)' = \big(\exp(b \log x)\big)' = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1} \in \mathcal{F}((0, +\infty))$.

• *Úloha.* Stejný vzorec platí pro $b \in \mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$ a pro $b \in \mathbb{Z}$ s $b \leq 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• *Tangens a kotangens.* Tvrzení 15 a derivace kosinu a sinu: $(\tan x)' = \big(\frac{\sin x}{\cos x}\big)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ a $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

• *Inverzní trigonometrické funkce.* Věta 19 dává, že $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(\arctan x)' = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$. Podobně $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. Shrneme to podle definičních oborů.

1. Na $\mathbb{R}$ se $(\exp x)' = \exp x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$, $(\operatorname{arccot} x)' = -1/(1 + x^2)$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $k_c' = k_0$, $c \in \mathbb{R}$.
2. Na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{Z}, n \leq 0$, a $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$.
3. Na $(0, +\infty)$ se $(x^b)' = bx^{b-1}$ pro $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a $(\log x)' = 1/x$.
4. Na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ se $(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$.
5. Na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ se $(\cot x)' = -1/(\sin x)^2$.
6. Na $(-1, 1)$ se $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

DĚKUJI ZA POZORNOST!