Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 6, 28. 3. 2024

SPOJITÉ FUNKCE

Počet spojitých funkcí

• *Spojité funkce.* Budeme používat ekvivalenci **(H)**:

$$f \text{ je spojitá v } b \in M(f) \text{ (definice 3 minule)}$$
$$\iff \forall\,(a_n) \subset M(f)\big(\lim a_n = b \Rightarrow \lim f(a_n) = f(b)\big)$$

– je to Heineho definice spojitosti funkce v bodě.

• *Úloha.* Přísně vzato jsme (H) minule dokázali v tvrzení 3 jen pro $b \in L(M(f))$. Dokažte (H) i pro $b \in M(f) \setminus L(M(f))$.

Definice 1 (spojitost) *Funkce f je spojitá* [continuous] *(na svém definičním oboru), je-li spojitá v každém bodu $b \in M(f)$. Množinu spojitých funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$ označíme $\mathcal{C}(M)$. Definujeme i $\mathcal{C} = \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{C}(M)$.*

• *Husté množiny.* Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Množina N je hustá (v množině M), když pro každé $a \in M$ a δ je $U(a,\delta) \cap N \neq \emptyset$.

• *Úloha.* Množina N je hustá v M $\iff$ pro každý bod $b \in M$ existuje posloupnost $(a_n) \subset N$ s lim $a_n = b$.

• *Úloha.* Ukažte, že množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 2 (hustota a spojitost) *$f, g \in \mathcal{C}(M)$, $N \subset M$ je hustá v M a pro každé $x \in N$ se $f(x) = g(x)$. Pak $f = g$.*

Důkaz. Nechť $b \in M$ a $(a_n) \subset N$ má $\lim a_n = b$. (H): $f(b) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(b)$. □

• *Zúžení funkce a Blumbergova věta.* Nechť $f \in \mathcal{R}$ a $M \subset \mathbb{R}$. Zúžením (restrikcí) funkce f na množinu M rozumíme funkci $f \mid M$ v $\mathcal{F}(M(f) \cap M)$ s hodnotami $(f \mid M)(x) = f(x)$.

• *Úloha.* Když $f \in \mathcal{C}$ a $M \subset \mathbb{R}$, pak $f \mid M \in \mathcal{C}$.

Věta 3 (H. Blumberg, 1922) *Každá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojité zúžení na nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}$ hustou v $\mathbb{R}$.*

Henry Blumberg (1886–1950) byl americký matematik, který se narodil v Litvě v městě Žagarė.

• *Počet spojitých funkcí.* Budeme potřebovat následující větu.

Věta 4 (Cantor–Bernsteinova) *Když existují injektivní funkce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$, existuje bijekce $h\colon X \to Y$.*

• *Úloha.* Dokažte, že funkce $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s hodnotami $s(n) = s(2^{k-1} \cdot (2l - 1)) = (k, l)$, kde $k, l, n \in \mathbb{N}$, je bijekce.

Kolik je spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Tolik jako reálných čísel.

Věta 5 (# spoj. funkcí) *Existuje bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Podle věty 4 stačí nalézt dvě injekce, $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $g\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. První je $f(a) = k_a$, tj. $f(a)$ je konstantní funkce s hodnotou a. Definujeme injekci $g\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Podle tvrzení 2 je každá funkce $j \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ určená zúžením $j \mid \mathbb{Q}$. Stačí zakódovat do jediného rozvoje $g(j) \in \mathbb{R}$ spočetně mnoho rozvojů $j(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}$. Nechť $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ a $s = (s_1, s_2)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jsou bijekce (viz úloha výše). Cifry $0, 1, \dots, 9$, desetinnou tečku . a znaménko $-$ kódujeme dvěma ciframi jako $c(0) = 00$, $c(1) = 01$, $\dots$, $c(9) = 09$,

$c(.) = 10$ a $c(-) = 11$. Pro funkci $j \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a k, l v $\mathbb{N}$ vezmeme její hodnotu $j(r(k)) = b(1,k)\, b(2,k) \dots b(l,k) \dots$, kde $b(l,k)$ jsou v $\{0, 1, \cdots, 9, ., -\}$. Definujeme

$$g(j) = 0.a_1\, a_2\, a_3\, \dots\, a_{2n-1}\, a_{2n}\, \dots,\quad a_j \in \{0,\, 1,\, \dots,\, 9\}\,,$$

kde $a_{2n-1}a_{2n} = c(b(l,k)) = c(b(s_1(n), s_2(n)))$. Funkce g je prostá – funkci j lze z rozvoje $g(j)$ jednoznačně rekonstruovat. $\square$

• *Úloha.* Zobecněte to: pro každou neprázdnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ existuje bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(M)$.

Nabývání mezihodnot

Věta 6 (o mezihodnotách) *$a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ & $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Pak pro nějaké $d \in (a,b)$ se $f(d) = c$.*

Důkaz. Nechť $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Položíme $X = \{x \in [a,b] \mid f(x) < c\}$ a $d = \sup(X)$, patrně $d \in [a,\, b]$. Ze spojitosti f v a a v b plyne, že $d \in (a,b)$. Uvidíme, že $f(d) < c$ a $f(d) > c$ vedou ke sporu, tedy $f(d) = c$. Nechť $f(d) < c$. Ze spojitosti f v d plyne existence δ, že pro každé $x \in U(d,\delta) \cap [a,b]$ je $f(x) < c$. Pak ale X obsahuje čísla větší než d, což je spor. Nechť $f(d) > c$. Ze spojitosti f v d plyne existence δ, že pro každé $x \in U(d,\delta) \cap [a,b]$ je $f(x) > c$. Pak ale každé $x < d$ blízké d leží mimo X, což je také spor. $\square$

• *Úloha.* Dokažte důsledek věty, že pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ a každou funkci $f \in \mathcal{C}(I)$ je $f[I]$ interval.

• *Úloha.* Horolezec začne o půlnoci výstup, po 24 hodinách dosáhne vrcholu a pak zase 24 hodin sestupuje do základního tábora. Ukažte, že existuje čas $t_0 \in [0, 24]$, kdy se v obou dnech nachází ve stejné nadmořské výšce.

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ roste, resp. klesá, pokud pro každé $x < y$ v M je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$.

Důsledek 7 (spojitost a prostota) *Když $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f \in \mathcal{C}(I)$ je prostá, pak f buď roste, anebo klesá.*

Důkaz. Kdyby f ani nerostla ani neklesala, našla by se v I tři čísla $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. V prvním případu pro každé d s $f(a), f(c) < d < f(b)$ podle věty 6 existují $x \in (a, b)$ a $y \in (b, c)$, že $d = f(x) = f(y)$ a máme spor s prostotou funkce f. Druhý případ vede na podobný spor. $\square$

Princip minimaxu

• *Kompaktní množiny.* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou $\lim a_{m_n} \in M$. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty a věty o limitě a uspořádání je každý interval $[a, b]$ kompaktní. Všechny kompaktní množiny popíšeme později.

Věta 8 (princip minimaxu) *Nechť $M \neq \emptyset$ je kompaktní množina a $f \in \mathcal{C}(M)$. Pak existují body $a, b \in M$, že pro každé $x \in M$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.*

Pak funkce f má v bodu a minimum (nejmenší hodnotu) $f(a)$ & v bodu b maximum (největší hodnotu) $f(b)$.

Důkaz. Dokážeme existenci maxima, minimum se řeší podobně. Nechť $A = \sup(f[M])$, bráno v $(\mathbb{R}^*, <)$. Patrně $f[M] \neq \emptyset$ a lze vzít $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = A$. Nějaká podposloupnost (a_{m_n}) má $\lim a_{m_n} = b \in M$. Podle (H) se $f(b) = \lim f(a_{m_n}) = \lim f(a_n) = A$, speciálně $A \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in M$ tak $f(x) \le A = f(b)$. $\square$

• *Úloha.* Spojité funkce $f, g\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a $g(x) = x$, nemají maximum.

• *Globální a lokální extrémy.* Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ má v $b \in M$ globální maximum, resp. globální minimum, když pro každé x v M je $f(x) \le f(b)$, resp. $f(x) \ge f(b)$. Funkce f má v $b \in M$ lokální maximum, resp. lokální minimum, když pro nějaké δ pro každé $x \in U(b,\delta) \cap M$ je $f(x) \le f(b)$, resp. $f(x) \ge f(b)$. Platí-li pro každé $x \ne b$ tyto nerovnosti jako ostré ($<$, resp. $>$), mluvíme o ostrém globálním maximu, atd.

Věta 9 (spoj. obraz kompaktu) *Když M je kompaktní množina a $f \in \mathcal{C}(M)$, pak i $f[M]$ je kompaktní množina.*

Důkaz. Nechť f a M jsou, jak uvedeno, a $(b_n) \subset f[M]$. Vezmeme $(a_n) \subset M$, že $f(a_n) = b_n$ (použili jsme axiom výběru), a podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in M$. (H): $\lim f(a_{m_n}) = f(a) = b$, takže $(b_{m_n}) = (f(a_{m_n}))$ má limitu $\lim b_{m_n} = b \in f[M]$. $\square$

Otevřené a uzavřené množiny

• Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, když pro každé $b \in M$ existuje δ, že $U(b,\delta) \subset M$. Je uzavřená, když její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřená množina.

• *Úlohy.* $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou otevřené množiny. Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

• *Úlohy.* Předešlé zůstává v platnosti pro uzavřené množiny, když vyměníme sjednocení a průnik.

Tvrzení 10 (uzavřené množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená $\iff$ pro $\forall\ (a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a$ je $a \in M$.*

Důkaz. $\Rightarrow$. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená a $(a_n) \subset M$ má $\lim a_n = a$. Když $a \in \mathbb{R} \setminus M$, pak pro nějaké δ je $U(a, \delta) \cap M = \emptyset$. To ale vzhledem k $a_n \to a$ není možné, tedy $a \in M$.

$\neg \Rightarrow \neg$. Když $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená, existuje $a \in \mathbb{R} \setminus M$, že pro každé n máme nějaké $a_n \in U(a, 1/n) \cap M$. Tedy $(a_n) \subset M$ & $\lim a_n = a \notin M$. $\square$

Popíšeme všechny otevřené množiny. <u>Otevřené intervaly</u> jsou intervaly tvaru $\mathbb{R}$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a (a, b) s $a < b$ v $\mathbb{R}$.

Tvrzení 11 (otevřené množiny) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená $\iff$ $\exists$ nejvýše spočetný systém $\{I_j \mid j \in J\}$ disjunktních otevřených intervalů, pro nějž $\bigcup_{j \in J} I_j = M$.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená. Pro každé $b \in M$ označíme jako $I(b)$ sjednocení všech intervalů (a, c), že $b \in (a, c) \subset M$. Zřejmě $b \in I(b)$, množiny $I(b)$ jsou otevřené intervaly a $b, b' \in M$ $\Rightarrow I(b) = I(b')$ nebo $I(b) \cap I(b') = \emptyset$. Pak $\mathcal{S} = \{I(b) \mid b \in M\}$ je hledaný systém otevřených intervalů. Injekce $F \colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}$ daná jako $F(I(p)) \in I(p) \cap \mathbb{Q}$ ukazuje, že $\mathcal{S}$ je nejvýše spočetná množina. $\square$

• *Úlohy.* Zdůvodněte tvrzení vyslovená v důkazu. Systém $\{I_j \mid j \in J\}$ je jednoznačně určený.

• *Cantorovo diskontinuum.* Uzavřené množiny mohou být mnohem složitější. *Cantorovo diskontinuum*

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \ (\subset [0,\, 1] = C_0),\ C_n = \tfrac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}C_{n-1}\right),$$

rovné nekonečnému průniku uzavřených množin, je uzavřená nespočetná množina délky $1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2/3}{1-2/3} = 1 - 1 = 0$. Viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set`

Charakterizace kompaktních množin

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, existuje-li $c > 0$, že pro každé $a \in M$ je $|a| \leq c$. Následující věta popisuje kompaktní množiny v $\mathbb{R}$.

Věta 12 (kompaktní množiny) *$M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní $\iff$ M je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Nechť M je omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$. Podle B.–W. věty máme konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in \mathbb{R}$. M je uzavřená a podle tvrzení 10 je $a \in M$. Tedy M je kompaktní.

Nechť M není omezená. Sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $|a_m - a_n| \geq 1$ jakmile $m \neq n$. To se dědí na podposloupnosti, které tedy nekonvergují a M není kompaktní. První člen a_1 je libovolný. Nechť jsou definovány $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a splňují, že $|a_i - a_j| \geq 1$ jakmile $i \neq j$. Protože M není omezená, existuje $a_{n+1} \in M$, že $|a_{n+1}| \geq 1 + \max(\{|a_1|, \ldots, |a_n|\})$. Pak je $|a_{n+1} - a_i| \geq 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Takto dostaneme (a_n).

Nechť M není uzavřená. Podle tvrzení 10 existuje posl. $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu a má i každá podposloupnost, která tedy v M nekonverguje. M není kompaktní. $\square$

- *Úloha.* Každá množina tvaru $[a, b] \setminus P(c, \delta)$ je kompaktní.

Stejnoměrná spojitost

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je stejnoměrně spojitá, SSP, když pro každé ε existuje δ, že vždy $a, b \in M \wedge |a - b| \le \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \le \varepsilon$.

Věta 13 (o SSP) *Když M je kompaktní a $f \in \mathcal{C}(M)$, pak f je stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, kde M je kompaktní, není SSP. Tedy existuje ε, že pro každé δ najdeme v M body $a = a(\delta)$ a $b = b(\delta)$ s $|a - b| \le \delta$, ale $|f(a) - f(b)| \ge \varepsilon$. Vezmeme body $a_n = a(1/n)$ a $b_n = b(1/n)$. Přechodem k podposloupnostem lze předpokládat, že $\lim a_n = a \in M$ a $\lim b_n = b \in M$. Z $|a_n - b_n| \le 1/n$ máme, že $a = b$. Ovšem nelze, aby se $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(a)$, protože pro každé n je $|f(a_n) - f(b_n)| \ge \varepsilon$. Podle (H) tak funkce f není spojitá v bodu $a = b$. □

- *Úloha.* Ukažte, že spojité funkce $f, g\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $g(x) = \sin(1/x)$, nejsou stejnoměrně spojité.
- *Úloha.* Dokažte následující důležitou vlastnost SSP funkcí.

Tvrzení 14 (rozšíření) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ je stejnoměrně spojitá a $b \in L(M)$. Pak existuje c, že pro každou $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = c$.*

Funkci f tak lze spojitě rozšířit do bodu b hodnotou $f(b) = c = \lim f(a_n)$ pro libovolnou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$.

Aritmetika spojitých funkcí

• *Součet, součin a podíl.* Osvěžme si aritmetiku funkcí ze čtvrté přednášky. Když $f, g \in \mathcal{R}$, pak $f + g, fg\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$, s hodnotami $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ a $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, a $f/g\colon M(f) \cap M(g) \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$, kde $Z(g) = \{x \in M(g) \mid g(x) = 0\}$, s hodnotami $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Tvrzení 15 (aritmetika spojitosti) *Když $f, g \in \mathcal{C}$, tak i $f + g$, fg a f/g jsou v $\mathcal{C}$.*

Důkaz. Důkazy pro všechny tři operace jsou prakticky stejné, a tak se podíváme jen na podíl. Nechť $b \in M(f/g)$ a $(a_n) \subset M(f/g)$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = b$. Podle (H) se $\lim f(a_n) = f(b)$ a $\lim g(a_n) = g(b)$. Výraz $f(b)/g(b)$ není neurčitý. Podle věty o aritmetice limit posloupností se $\lim(f/g)(a_n)$ rovná

$$\lim \big(f(a_n)/g(a_n)\big) = \lim f(a_n)/\lim g(a_n) = f(b)/g(b) = (f/g)(b)$$

a podle (H) je funkce f/g v bodě b spojitá. □

• *Polynomy a racionální funkce.* Ve 4. přednášce jsme polynomy POL definovali jako funkce, které vzniknou z konstantních funkcí $k_c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$, a z identity $\mathrm{id} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $\mathrm{id}(x) = x$, sčítáním a násobením.

• *Úloha.* Dokažte, že $k_c, \mathrm{id} \in \mathcal{C}$.

Z předešlé věty tak ihned máme důsledek.

Důsledek 16 (polynomy jsou spojité) $\mathrm{POL} \subset \mathcal{C}$.

Ve 4. přednášce jsme rac. funkce RAC definovali jako funkce, které vzniknou z konstantních funkcí a z identity pomocí sčítání, násobení a dělení. Opět máme důsledek.

Důsledek 17 (rac. funkce jsou spojité) $\mathrm{RAC} \subset \mathcal{C}$.

Spojitost funkcí $\exp x$, $\cos x$ a $\sin x$

• *Spojitost mocninných řad.* Ve 4. přednášce jsme tyto funkce definovali mocninnými řadami. Jejich spojitost plyne z následující věty.

Věta 18 (spojitost moc. řad) *Nechť* $(a_0, a_1, \dots) \subset \mathbb{R}$ *má limitu* $\lim |a_n|^{1/n} = 0$. *Pak řada* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *absolutně konverguje pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *a* $S(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť a_n jsou, jak je uvedeno, a $x, c \in \mathbb{R}$. Potom $0 \le |a_n|^{1/n}|x| \le \frac{1}{2}$ pro $n \ge n_0$, takže $|a_n x^n| \le (1/2)^n$ pro $n \ge n_0$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je tak AK. Dále se $|S(x+c) - S(x)|$ rovná

$$|c| \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} c^{i-1} x^{n-i} \right| \le |c| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot (|x| + |c| + 1)^n ,$$

což jde k 0, když c jde k 0. Funkce S je tedy spojitá v x. $\square$

• *Úloha.* Vysvětlete tento výpočet podrobně.

Protože $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$ a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$, máme důsledek.

Důsledek 19 (e^x, $\cos x$ a $\sin x$) *Tyto funkce jsou v* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Složené a inverzní funkce

• *Skládání funkcí.* I ono zachovává spojitost. Připomínáme, že pro $f, g \in \mathcal{R}$ má $f(g) \in \mathcal{F}(M)$, kde $M = \{x \in M(g) \mid g(x) \in M(f)\}$, hodnoty $f(g)(x) = f(g(x))$.

Tvrzení 20 (skládání) *Když $f, g \in \mathcal{C}$, pak i $f(g) \in \mathcal{C}$.*

Důkaz. Nechť $f, g \in \mathcal{C}$, $b \in M(f(g))$ a nechť $(a_n) \subset M(f(g))$ má $\lim a_n = b$. Podle (H) se $\lim g(a_n) = g(b)$ a též

$$\lim\ f(g)(a_n) = \lim\ f(g(a_n)) = f(g(b)) = f(g)(b)\ .$$

Podle (H) je funkce $f(g)$ spojitá v bodě b. $\square$

• *Inverzní funkce.* Na rozdíl od předchozích operací invertování spojitost obecně nezachovává. Například funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(0) = 0$ a $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n > 0$ je spojitá, ale její inverz $0 \mapsto 0$ a $\frac{1}{n} \mapsto n$ není v 0 spojitý. Následující věta tak nabývá na důležitosti.

Věta 21 (spojitost inverzů) *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$ je prostá. Inverz $f^{-1}\colon f[M] \to M$ je spojitý v následujících situacích.*
(1) *M je kompaktní množina.*
(2) *M je interval.*
(3) *M je otevřená množina.*
(4) *M je uzavřená množina a f je monotónní.*

Důkaz. (1) Nechť M je kompaktní, $b \in f[M]$ a $(b_n) \subset f[M]$ má $\lim b_n = b$. Nechť $a = f^{-1}(b)$ a $a_n = f^{-1}(b_n)$ ($\in M$). Dokážeme, že $\lim a_n = a$, což díky (H) dá spojitost funkce f^{-1} v b. Dokážeme, že každá podposloupnost posloupnosti (a_n) má podposloupnost s limitou a. Podle části 3 tvrzení 7 ve 2. přednášce pak je $\lim a_n = a$. Nechť (a_n') je podposloupnost posloupnosti (a_n). Použijeme kompaktnost M a vezmeme podposloupnost (a_{m_n}) v (a_n') s $\lim a_{m_n} = c \in M$. Podle ekvivalence (H) je $\lim f(a_{m_n}) = f(c) = b$, protože

$(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti (b_n). Vzhledem k prostotě f se $c = a$.

(2) Nechť M je interval. Podle důsledku 7 f roste nebo klesá. Nechť f klesá, případ rostoucí f je podobný. Podle věty 6 je $f[M]$ interval. Nechť $b \in f[M]$ a je dáno ε. Ukážeme, že f^{-1} je v b zprava spojitá. Je tomu tak, když b je pravý konec intervalu $f[M]$, pak $U^+(b, \delta) \cap f[M] = \{b\}$. Nechť b není pravý konec intervalu $f[M]$. Protože f^{-1} klesá, $a = f^{-1}(b) \in M$ není levý konec intervalu M a búno je ε tak malé, že $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Položíme

$$\delta = f(a - \varepsilon) - f(a) = f(a - \varepsilon) - b > 0 \ .$$

Podle věty 6 je f (klesající) bijekce z $[a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta]$ a tedy také z $(a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta)$. Tedy $[b, b+\delta) \subset f[M]$ a $U^+(b,\ \delta) \cap f[M] = U^+(b,\ \delta) = [b, b + \delta)$. Takže

$$f^{-1}[\,U^+(b,\ \delta) \cap f[M]\,] = U^-(a,\ \varepsilon) \subset U(a,\ \varepsilon) = U(f^{-1}(b),\ \varepsilon)$$

a f^{-1} je v b zprava spojitá. Spojitost funkce f^{-1} v b zleva se dokáže podobně. Tedy (podle úlohy minule) je f^{-1} v b spojitá.

(3) a **(4)** – viz **K**. $\square$

Důsledek 22 ($\log x$ **a** $\arcsin x$**)** *Tyto funkce jsou spojité.*

Stejně tak i $\arccos x$, $\arctan x$ a $\operatorname{arccot} x$.

- *Úloha.* Dokažte spojitost funkcí $x^b \in \mathcal{F}([0, +\infty))$, $b > 0$.

- *Úloha.* Dokažte, že $\mathrm{EF} \subset \mathcal{C}$ – každá elementární funkce (viz definice ve čtvrté přednášce) je spojitá.

DĚKUJI ZA POZORNOST A HEZKÉ VELIKONOCE!