Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 5, 21. 3. 2024

VLASTNOSTI LIMIT FUNKCÍ A BODOVÁ SPOJITOST. ASYMPTOTICKÉ ZNAČENÍ

Neřekneme-li jinak, všechny funkce uvažované od minulé přednášky dále leží v $\mathcal{R}$, jsou tedy typu $f\colon M \to \mathbb{R}$ s $M \subset \mathbb{R}$.

Jednostranné limity funkcí

• *Jednostranná okolí a jednostranné limitní body.* Všimněme si, že $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ se pro každé $a \in \mathbb{R}$ skládá ze dvou oddělených částí – na rozdíl od roviny $\mathbb{R}^2$ se v $\mathbb{R}$ bod a nedá „obejít“. Proto se zavádějí limity funkcí v bodu zleva a zprava. Začneme definicí jednostranných okolí.

Levé, resp. pravé, ε-okolí bodu $b \in \mathbb{R}$ je $U^-(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon,\, b]$, resp. $U^+(b, \varepsilon) = [b,\, b + \varepsilon)$. Levé, resp. pravé, prstencové ε-okolí bodu b je $P^-(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon,\, b)$, resp. $P^+(b, \varepsilon) = (b,\, b + \varepsilon)$. Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým, resp. pravým, limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud pro každé ε je $P^-(b, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$, resp. $P^+(b, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Množiny těchto bodů označíme jako $L^-(M)$, resp. $L^+(M)$ $(\subset \mathbb{R})$. Bod $b \in \mathbb{R}$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, krátce OLB, pokud pro každé ε je $P^-(b, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ i $P^+(b, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Jejich množinu označíme jako $L^{\pm}(M)$.

• *Úloha.* Bod $b \in L^-(M)$, resp. $b \in L^+(M)$ $\iff$ existuje $(a_n) \subset (-\infty, b) \cap M$, resp. $(a_n) \subset (b, +\infty) \cap M$, že $\lim a_n = b$.

• *Jednostranné limity funkcí.* Podobají se obyčejným limitám.

Definice 1 (jednostranné limity) *Nechť* $f \in \mathcal{F}(M)$ *&* $b \in L^-(M)$. *Pokud pro každé* ε *existuje* δ, *že* $f[P^-(b,\delta) \cap M] \subset U(L,\varepsilon)$, *píšeme* $\lim_{x\to b^-} f(x) = L$ *a řekneme, že funkce* f *má v bodě* b *limitu zleva rovnou* L. *Náhrada znaménka* $^-$ *znaménkem* $^+$, *dává limitu v* b *zprava* $\lim_{x\to b^+} f(x) = L$.

• *Úlohy.* (i) Když $\lim_{x\to b} f(x) = L$, pak $\lim_{x\to b^-} f(x) = L$ nebo $\lim_{x\to b^+} f(x) = L$. (ii) Když $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x) = L$, pak i $\lim_{x\to b} f(x) = L$. (iii) Konečně pokud $\lim_{x\to b^-} f(x) = K$, $\lim_{x\to b^+} f(x) = L$ a $K \neq L$, pak $\lim_{x\to b} f(x)$ neexistuje.

Funkce znaménka $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ tedy nemá v nule limitu, protože $\lim_{x\to 0^-} \mathrm{sgn}\, x = -1$ a $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{sgn}\, x = 1$. Jednoznačnost limity a Heineho definice fungují pro jednostranné limity funkcí stejně jako pro obyčejné limity.

Spojitost v bodu

Následující definice je důležitá.

Definice 2 (spojitost v bodu) *Funkce* $f \in \mathcal{F}(M)$ *a* b *je v* M. *Řekneme, že* f *je spojitá v bodu* b, *když pro každé* ε *existuje* δ, *že* $f[U(b,\delta) \cap M(f)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. *Když to neplatí, řekneme, že* f *je v* b *nespojitá.*

• *Úloha.* Kdy je tedy f v $b \in M(f)$ nespojitá?

Například $\mathrm{sgn}\, x$ je nespojitá v $x = 0$, ale všude jinde je spojitá. Když $b \notin M(f)$, funkce f není v b ani spojitá ani nespojitá. Při srovnání s limitou $\lim_{x\to b} f(x) = L$ vidíme, že L se nahradilo hodnotou $f(b)$ a prstencové okolí $P(b,\delta)$ obyčejným okolím $U(b,\delta)$.

• *Úloha.* Funkce f je spojitá v $b \in M(f)$, právě když pro každé ε existuje δ, že $x \in M(f) \wedge |x-b| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(b)| \le \varepsilon$.

Tvrzení 3 (spojitost v bodě) *Pro funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ & bod $b \in M \cap L(M)$ jsou* (1), (2) *a* (3) *vzájemně ekvivalentní.* (1) *Funkce f je v b spojitá.* (2) $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. (3) *Pro každou posl. $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = f(b)$.*

Důkaz. Implikace $1 \Rightarrow 2$. Nechť f je spojitá v b podle definice 2 a buď dáno ε. Tedy existuje δ, že $f[U(b,\delta)\cap M] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Pak i $f[P(b,\delta)\cap M] \subset U(f(b),\varepsilon)$ a $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Implikace $2 \Rightarrow 3$. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, $(a_n) \subset M$ má limitu $\lim a_n = b$ a je dáno ε. Tedy existuje δ, že

$$f[P(b,\,\delta)\cap M] \subset U(f(b),\,\varepsilon)\ . \tag{$*$}$$

Vezmeme n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in U(b,\delta)$. Pak též $n \ge n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b),\varepsilon)$: pro $a_n \neq b$ použijeme inkluzi $(*)$ a pro $a_n = b$ je $f(a_n) = f(b) \in U(f(b),\varepsilon)$. Tedy $\lim f(a_n) = f(b)$.

Implikace $3 \Rightarrow 1$, to jest $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Nechť f není spojitá v b. Pak existuje takové ε, že pro $\forall\,\delta\,\exists\, a = a(\delta) \in U(b,\delta)\cap M$, že $f(a) \not\in U(f(b),\varepsilon)$. Pro každé n *vybereme* nějaké takové $a_n = a(1/n)$ a dostaneme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \not\in U(f(b),\varepsilon)$ pro každé n. Tedy $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$ a část 3 neplatí. □

Poslední implikaci jsme opět dokázali s pomocí *axiomu výběru.*

• *Izolované body.* Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina $M \setminus L(M)$ je tvořena takzvanými izolovanými body množiny M.

• *Úloha.* Bod $b \in M$ je izolovaný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, právě když pro nějaké ε je $U(b,\varepsilon) \cap M = \{b\}$.

Tvrzení 4 (spojitost v iz. bodu) *Každá funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá v každém izolovaném bodu množiny $M(f)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in M$ je izolovaný. Pak existuje δ, že $U(b,\delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto δ inkluze

$$f[U(b,\,\delta) \cap M] = f[\{b\}] = \{f(b)\} \subset U(f(b),\,\varepsilon)$$

platí pro každé ε. Podle definice 2 je f spojitá v b. $\square$

• *Úloha.* Nechť $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost zapsaná jako funkce. V kterých bodech svého definičního oboru $\mathbb{N}$ je a spojitá?

• *Jednostranná spojitost.* Řekneme, že funkce f je <u>zleva spojitá</u> v bodě $b \in M(f)$, když pro každé ε existuje δ, že $f[U^-(b,\delta) \cap M(f)] \subset U(f(b),\,\varepsilon)$ Náhradou znaménka $^-$ znaménkem $^+$ dostaneme <u>spojitost zprava</u>.

• *Úloha.* Funkce je v daném bodu spojitá, právě když je v něm zleva i zprava spojitá.

Riemannova funkce

Je to funkce $r \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s hodnotami $r(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a $r(m/n) = \frac{1}{n}$ pro zlomek $\frac{m}{n}$ v základním tvaru.

Tvrzení 5 (o Riemannově funkci) *Tato funkce je spojitá právě v iracionálních číslech.*

Důkaz. Nechť $x = \frac{m}{n}$ je zlomek v základním tvaru a $\varepsilon \le \frac{1}{n}$. Pro $\forall\, \delta\, \exists$ iracionální $\alpha \in U(x,\delta)$. Ale $r(\alpha) = 0 \notin U(r(x),\varepsilon) = U(\frac{1}{n},\varepsilon)$, takže funkce r není v bodě x spojitá.

Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a je dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Definujeme

$$M = \{|x - \tfrac{m}{n}| \mid \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap U(x,\,1) \wedge 1/n \geq \varepsilon\} \;\text{ a }\; \delta = \min(M)\ .$$

Toto δ existuje a $\delta > 0$, protože podle úlohy níže je M neprázdná konečná množina kladných čísel. Pro toto δ platí, že $y \in U(x, \delta) \Rightarrow r(y) \in U(r(x), \varepsilon) = U(0, \varepsilon)$ – pro každé $y \in U(x, \delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Proto je funkce r v bodu x spojitá. $\square$

- *Úloha.* Zdůvodněte uvedené vlastnosti množiny M.

Limity monotónních funkcí

Nechť $N \subset M(f)$. Funkce f na N <u>neklesá</u>, resp. <u>neroste</u>, pokud pro každé $x \leq y$ v N je $f(x) \leq f(y)$, resp. $f(x) \geq f(y)$. Když f na N neklesá či neroste, je na N <u>monotónní</u>.

Věta 6 (limity mon. funkcí) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a existuje δ, že s $V := P^-(b, \delta) \cap M$, popř. $V := U(+\infty, \delta) \cap M$, je $b \in L^-(V)$, popř. $+\infty \in L(V)$, a f na V neklesá. <u>Pak</u>*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup(f[V]),\ \ \textit{popř.}\ \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup(f[V])\,,$$

kde suprema bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť f, M, V, b a δ jsou, jak uvedeno (druhá limita v $+\infty$ se dokáže podobně), a je dáno ε. Označíme si $A = \sup(f[V])$ a vezmeme libovolné $a \in U(A, \varepsilon)$ s $a < A$. Podle definice suprema existuje $c \in V$, že $a < f(c) \leq A$. Položíme $\theta = b - c$. Pro každé $d \in M$, že $c < d < b$, je $a < f(c) \leq f(d) \leq A$, tedy $f(d) \in U(A, \varepsilon)$. Tedy $f[P^-(b, \theta) \cap M] \subset U(A, \varepsilon)$ a $\lim_{x \to b^-} f(x) = A$. $\square$

Pro obyčejné limity věta neplatí: funkce $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (kde

$\operatorname{sgn} x = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$ a $\operatorname{sgn} x = 1$ pro $x > 0$) na $\mathbb{R}$ neklesá, ale $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje.

• *Úloha.* Popište tři další varianty věty: pro lokálně nerostoucí funkci a/nebo limitu v b zprava, popř. v $-\infty$.

Aritmetika limit funkcí

Aritmetiku limit (AL) rozšíříme z posloupností na funkce. V důkazu využijeme Heineho definici limity funkce.

> **Věta 7 (AL funkcí)** *Nechť f a g jsou v $\mathcal{R}$, prvek A je v $L(M(f) \cap M(g))$, $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to A} g(x) = L$. <u>Pak</u> se $\lim_{x\to A}(f+g)(x) = K + L$, $\lim_{x\to A}(fg)(x) = KL$ a $\lim_{x\to A}(f/g)(x) = K/L$, když výraz napravo není neurčitý.*

Důkaz. Probereme jen podíl, součet a součin jsou jednodušší. Nechť K/L není neurčitý výraz, speciálně $L \neq 0$. Tedy $g(x) \neq 0$ na $M(g) \cap P(A, \delta)$ pro nějaké δ a $A \in L(M)$, $M = M(f) \cap M(g) \setminus Z(g)$. Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s $\lim a_n = A$. Podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Rightarrow$) se $\lim f(a_n) = K$ a $\lim g(a_n) = L$. Podle věty o AL posloupností se pak

$$\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L}\ .$$

Protože toto platí pro každou posloupnost $(f(a_n)/g(a_n))$ s (a_n) jak uvedeno, podle Heineho definice limity funkce (implikace $\Leftarrow$) se $\lim_{x\to A}(f/g)(x) = \lim_{x\to A} f(x)/g(x) = K/L$. $\square$

• *Úloha.* Přizpůsobte větu 7 pro jednostranné limity.

Limity funkcí a lineární uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$

Uvedeme dvě věty. Pro $M, N \subset \mathbb{R}$ porovnání $M < N$ znamená, že $a \in M, b \in N \Rightarrow a < b$. V následující větě dovolujeme $A \neq B$.

Věta 8 (limity a $(\mathbb{R}^*, <)$**)** *Mějme limity* $\lim_{x\to A} f(x) = K$ *a* $\lim_{x\to B} g(x) = L$*. Pak platí následující.*
(1) $K < L \Rightarrow \exists\, \delta$*:* $f[P(A,\delta) \cap M(f)] < g[P(B,\delta) \cap M(g)]$.
(2) *Když pro každé* $\delta > 0$ *existují* $x \in P(A,\delta) \cap M(f)$ *a* $y \in P(B,\delta) \cap M(g)$*, že* $f(x) \geq g(y)$*, pak* $K \geq L$*.*

Důkaz. 1. Protože $K < L$, existuje ε, že $U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Pak podle předpokladu o limitách funkcí f a g existuje δ, že $f[P(A,\delta) \cap M(f)] \subset U(K,\varepsilon)$ a $g[P(B,\delta) \cap M(g)] \subset U(L,\varepsilon)$. Tedy

$$f[P(A,\delta) \cap M(f)] < g[P(B,\delta) \cap M(g)]\ .$$

2. Část 2 je jen obměna implikace v části 1. □

Symbol $I(a,b)$ označuje uzavřený reálný interval s konci a a b.

Věta 9 (dva funkční strážníci) *Nechť funkce* f*,* g *a* h *jsou v* $\mathcal{F}(M)$*,* K *je v* $L(M)$*,* $\lim_{x\to K} f(x) = \lim_{x\to K} g(x) = L$ *a nechť existuje* δ*, že pro každé* $x \in P(K,\delta) \cap M$ *je* $h(x) \in I\big(f(x),\, g(x)\big)$*. Potom také* $\lim_{x\to K} h(x) = L$*.*

Důkaz. Nechť f, g, h, M, K, L a δ jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Vezmeme $\theta \leq \delta$, že pro každé $x \in P(K,\theta) \cap M$ hodnoty $f(x)$ a $g(x)$ leží v $U(L,\varepsilon)$. Pro tato x je tedy

$$h(x) \in I\big(f(x),\, g(x))\big) \subset U(L,\, \varepsilon) \ \text{ a } \ h(x) \in U(L,\, \varepsilon),$$

protože $U(L,\varepsilon)$ je konvexní množina. Tedy $\lim_{x\to K} h(x) = L$. □

Limity složených funkcí

Operace skládání funkcí nemá u posloupností obdobu. Následující věta je tak v tomto ohledu novinkou.

Věta 10 (limita $f(g)$) $\lim_{x\to A} g(x) = K$, $\lim_{x\to K} f(x) = L$, $M := M(f(g))$ *a* $A \in L(M)$. *Pak* $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$ $\iff$ *je splněna podmínka* (i) *nebo podmínka* (ii).
(i) *Platí implikace* $K \in M(f) \Rightarrow f(K) = L$.
(ii) *Existuje* δ, *že* $g(x) \neq K$ *na* $P(A, \delta) \cap M$.
Neplatí-li ani (i) *ani* (ii), *pak* $\lim_{x\to A} f(g)(x)$ *neexistuje nebo se rovná* $f(K) \neq L$.

Důkaz. Nechť A, g, K, f, L a M ($\subset M(g)$) jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Podle předpokladů existuje θ, že (a) $f[P(K,\theta) \cap M(f)] \subset U(L,\varepsilon)$, a existuje θ', že (b) $g[P(A,\theta') \cap M(g)] \subset U(K,\theta)$. Nechť platí podmínka (i). Inkluze (a) tím zesílí na $f[U(K,\theta) \cap M(f)] \subset U(L,\varepsilon)$. Patrně $g[M] \subset M(f)$. V

$$\begin{aligned} f(g)[P(A,\, \theta') \cap M] &= f[g[P(A,\, \theta') \cap M]] \\ &\subset f[U(K,\, \theta) \cap M(f)] \subset U(L,\, \varepsilon) \end{aligned}$$

tak druhá inkluze platí a $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Nechť platí podmínka (ii). Ono θ' vezmeme $\le \delta$ v podmínce (ii). Inkluze (b) tím zesílí na $g[P(A,\theta') \cap M(g)] \subset P(K,\theta)$. V

$$\begin{aligned} f(g)[P(A,\, \theta') \cap M] &= f[g[P(A,\, \theta') \cap M]] \\ &\subset f[P(K,\, \theta) \cap M(g)] \subset U(L,\, \varepsilon) \end{aligned}$$

tak první inkluze platí a opět $\lim_{x\to A} f(g(x)) = L$.

Nechť ani podmínka (i) ani podmínka (ii) neplatí. Neplatnost (i) znamená, že $K \in M(f)$, ale $f(K) \neq L$. Neplatnost (ii) znamená, že pro každé n existuje $a_n \in P(A, 1/n) \cap M$, že $g(a_n) = K$. Pak

$(a_n) \subset M \setminus \{A\}$, $\lim a_n = A$ a

$$\lim f(g)(a_n) = \lim f(g(a_n)) = \lim f(K) = f(K) \ \ (\neq L) \ .$$

Podle Heineho definice limity funkce tedy $\lim_{x \to A} f(g(x))$ buď neexistuje, anebo se rovná $f(K)$, což však není L. $\square$

Podmínka (i) je splněna vždy, když $K \notin M(f)$, např. pro $K = \pm\infty$ – pak lze větu vždy použít. Naše věta o limitě složené funkce je, na rozdíl od jiných, ekvivalence. V **K** ji ještě zesílíme.

- *Úloha.* Dokažte větu 10 pomocí Heineho definice limity funkce.
- *Úloha.* Odvoďte z věty 10 následující důsledek.

Důsledek 11 (limity v 0 **a v** $+\infty$**)** *Předpokládejme, že množina* $M \subset (0, +\infty)$*, že* $0 \in L(M)$ *a že* $f \colon M \to \mathbb{R}$*.* *Potom* $\lim_{y \to 0} f(y) = L$*, právě když* $\lim_{x \to +\infty} f(1/x) = L$*.*

Asymptotické značení

- *Asymptotické symboly* O *a* $\ll$*.* Tyto nemají limitní povahu.

Definice 12 (O **a** $\ll$**)** *Nechť* $N \subset M(f) \cap M(g)$*. Píšeme* $f(x) = O(g(x))$ $(x \in N)$ *(„na množině* N *je funkce* f *velké* O *z funkce* g*“), existuje-li* $c > 0$*, že pro každé* $x \in N$ *je* $|f(x)| \le c \cdot |g(x)|$*. Značení* $f(x) \ll g(x)$ $(x \in N)$ *znamená totéž.*

- *Úlohy.* Rozhodněte, zda platí následující vztahy. (i) $x^2 = O(x^3)$ $(x \in \mathbb{R})$. (ii) $x^3 = O(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$. (iii) $x^3 \ll x^2$ $(-20 < x < 20)$. (iv) $\log x = O(x^{1/3})$ $(x > 0)$. (v) $\log x \ll x^{1/3}$ $(x > 1)$.
- *Asymptotické symboly* o *a* $\sim$*.* Tyto jsou limitní povahy.

Definice 13 (o a $\sim$) *Nechť A je v $L(M(f/g))$. Píšeme $\underline{f(x) = o(g(x))\ (x \to A)}$ („pro $x \to A$ je funkce f malé o z funkce g“), jestliže* $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 0$*. Píšeme $\underline{f(x) \sim g(x)\ (x \to A)}$ („pro $x \to A$ je funkce f asymptoticky rovna funkci g“), jestliže* $\lim_{x \to A} f(x)/g(x) = 1$.

• *Úlohy.* Rozhodněte, zda platí následující vztahy. (i) $x^2 = o(x^3)$ $(x \to +\infty)$. (ii) $x^3 = o(x^2)$ $(x \to 0)$. (iii) $x^2 = o(x^3)$ $(x \to 0)$. (iv) $(x+1)^3 \sim x^3$ $(x \to 1)$. (v) $(x+1)^3 \sim x^3$ $(x \to +\infty)$. (vi) $\mathrm{e}^{-1/x^2} = o(x^{20})$ $(x \to 0)$.

Příklady asymptotik

(1) Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{N} \mid p \le x \text{ a } p \text{ je prvočíslo}\}|\,.$$

V r. 1896 *Jacques Hadamard (1865–1963)* a, nezávisle na něm, *Charles J. de la Vallée Poussin (1866–1962)* dokázali slavnou Prvočíselnou větu, že

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to +\infty)\,.$$

(2) Pro $k, n \in \mathbb{N}$ $(= \{1, 2, \dots\})$ definujeme $[n] = \{1, \dots, n\}$ a

$$r_k(n) = \max\big(\{|X| \mid X \subset [n] \text{ a neobsahuje arit. posl. délky } k\}\big)\,.$$

V r. 1975 *Endre Szemerédi (1940)* dokázal též slavnou větu, že pro každé k je

$$r_k(n) = o(n) \quad (n \to +\infty)\,.$$

(3) Zápis $f(x) = g(x) + O(h(x))$ $(x \in N)$ říká, že $f(x) - g(x) = O(h(x))$ $(x \in N)$. Podobně rozumíme zápisu $f(x) = g(x) +$

$o(h(x))$ $(x \to A)$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$D(x) = |\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid mn \le x\}|\,.$$

• *Úloha.* Ukažte, že $D(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)$, kde $\tau(n)$ je počet dělitelů čísla n (např. $\tau(28) = |\{1,2,4,7,14,28\}| = 6$).

Úloze odhadnout $D(x)$ se tak říká *(Dirichletův) problém dělitelů.* V r. 1849 *Peter L. Dirichlet (1805–1859)* dokázal, že

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \quad (x \ge 2)$$

(γ je Eulerova konstanta, známá z asymptotiky harmonických čísel). V r. 1903 *Georgij F. Voronoj (1868–1908)* dokázal, že

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O\big(x^{1/3} \log x\big) \quad (x \ge 2)\,.$$

Ve 20. století přišla řada dalších zlepšení odhadu chyby v problému dělitelů. Současný rekord drží *Martin N. Huxley (1944)*, který v r. 2003 dokázal, že pro každé ε je

$$D(x) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O_\varepsilon\big(x^{131/416+\varepsilon}\big) \quad (x \ge 2)\,.$$

Značení O_ε zde znamená, že konstanty c v těchto odhadech O závisejí na ε (a pro $\varepsilon \to 0$ jdou patrně do $+\infty$ $-$ kdyby nešly, mohli bychom vzít jediné společné c a index ε vynechat).

(4) Pro $n \in \mathbb{N}$ a nějaký algoritmus T pro násobení celých čísel definujeme $T(n) \in \mathbb{N}$ jako

$$\min\big(\{k \mid T \text{ vynásobí dvě } n\text{-ciferná čísla v} \le k \text{ krocích}\}\big)\,.$$

Školský algoritmus T_s splňuje $T_s(n) = O(n^2)$ $(n \in \mathbb{N})$. V r. 1960 *Anatolij A. Karacuba (1937–2008)* vymyslel algoritmus T_K, který násobí s rychlostí $T_K(n) = O\big(n^{\log_2 3}\big) = O\big(n^{1.585\ldots}\big)$ $(n \in \mathbb{N})$.

V r. 2021 *David Harvey (nar. v Sydney)* a *Joris van der Hoeven (1971)* publikovali algoritmus T_{HH} pro násobení celých čísel se složitostí

$$T_{HH}(n) = O(n \log n) \qquad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \,.$$

- *Úloha.* Proč tu nepíšeme $n \in \mathbb{N}$?

DĚKUJI ZA POZORNOST!