Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 4, 14. 3. 2024

ŘADY. LIMITY FUNKCÍ. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

Řady

• *Definice.* Opakujme si. Řada je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a značíme ji $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots$. Její členy a_n jsou sčítance. Její součet je limita $\lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R}^*$, existuje-li. Značíme ho opět $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots$. Členy posloupnosti $(s_n) = (a_1 + \cdots + a_n)$ jsou částečné součty (řady). Řada s vlastním součtem konverguje, jinak diverguje. Konvergenci (tedy ani divergenci) řady nezruší žádná změna konečně mnoha sčítanců, jde o robustní vlastnosti.

• *Úloha.* Pro každou konvergentní řadu se ale po změně libovolného (jediného) sčítance její součet změní.

U posloupností (a_n) index n obvykle probíhá $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, ale u řad $\sum a_n$ sčítací index n často probíhá i jiné spočetné množiny.

• *Úloha.* Každá řada $a_1 + a_2 + \dots$ se sčítanci $a_n \geq 0$ pro každé $n \geq n_0$ má součet, který není $-\infty$. Podobně každá řada se skoro všemi sčítanci nekladnými má součet, který není $+\infty$.

Tvrzení 1 (nutná podmínka konv.) *Když řada* $\sum a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ konverguje. Položíme $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Součet $S = \lim s_n \in \mathbb{R}$. Podle limit podposloupností a AL je $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$. $\square$

Řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots$ a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - \dots$ tedy divergují. První má součet $+\infty$, druhá nemá součet.

Harmonická řada

Je to řada $\sum 1/n$. I když $\lim 1/n = 0$, diverguje a má součet $+\infty$.

- *Úlohy.* (i) Když posloupnost (a_n) neklesá a má podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = +\infty$, pak i $\lim a_n = +\infty$. (ii) Když sčítance řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ splňují $a_n \geq b_n$ pro každé $n \geq n_0$ a $\sum b_n = +\infty$, potom i $\sum a_n = +\infty$.

Tvrzení 2 (o harm. řadě) *Harmonická řada má součet* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty$.

Důkaz. Vezmeme řadu $\sum b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Obecně $b_{2^k} = b_{2^k+1} = \cdots = b_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^{k+1}}$. Pro $\forall\, n$ je $1/n > b_n$. Částečné součty (s_n) řady $\sum b_n$ rostou a pro $k \in \mathbb{N}_0$ se $s_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = (k+1)/2$. Podle úlohy (i) tedy $\sum b_n = \lim s_n = +\infty$. Pak podle úlohy (ii) také $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. $\square$

Částečné součty $(h_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots) \subset \mathbb{Q}$ harmonické řady jsou tzv. harmonická čísla. Že jdou do $+\infty$ dokázal v r. 1350 francouzský scholastik *Mikuláš Oresme (cca 1320–1382)*.

Věta 3 (asymptotika harmonických č.) *Uvažme harmonická čísla* $h_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$. *Pak* $h_n = \log n + \gamma + O(1/n)$ $(n \in \mathbb{N})$, *kde* $\gamma = 0.57721\dots$ *je tzv. Eulerova konstanta.*

$O(1/n)$ značí členy nějaké posloupnosti (a_n/n), kde $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená posloupnost. Větu 3 dokážeme později pomocí integrálů.

Dokázat iracionalitu konstanty γ, že $\gamma \notin \mathbb{Q}$, je otevřený problém.

- *Úloha.* Dokažte, že $h_n \in \mathbb{N} \iff n = 1$. Návod: $m = 2^k(2l-1)$.

Riemannova věta

V první přednášce jsme se setkali s řadou $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$ se součtem 0. Ten jsme přerovnáním sčítanců změnili na kladný. Takto se chovají následující řady.

> **Věta 4 (Riemannova)** *Když* $\sum a_n$ *má tři vlastnosti, že* (i) $\lim a_n = 0$, (ii) $\sum a_{k_n} = +\infty$, *kde* a_{k_n} *jsou kladné sčítance, a* (iii) $\sum a_{z_n} = -\infty$, *kde* a_{z_n} *jsou záporné sčítance, pak pro každé* $A \in \mathbb{R}^*$ *existuje taková bijekce* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *že součet (přerovnané) řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$.

Důkaz je/bude v **K**. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jejím přerovnáním rozumíme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$, kde $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Riemannovskou řadu, řadu s vlastnostmi (i)–(iii) lze tedy přerovnat tak, že se dostane libovolný součet.

Absolutně konvergentní řady

Jejich součet naopak žádné přerovnání nezmění. Teprve tyto řady správné zobecňují konečné součty na nekonečné. Řekneme, že $\sum a_n$ absolutně konverguje (je AK), konverguje-li řada $\sum |a_n|$. Ukážeme, že terminologie je rozumná.

> **Tvrzení 5 (AK ⇒ K)** *Každá* AK *řada konverguje.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ je AK řada s částečnými součty (s_n). Stačí ukázat, že (s_n) je Cauchyova – podle věty o Cauchyově podmínce pak (s_n) konverguje. Nechť (t_n) jsou částečné součty řady $\sum |a_n|$.

Pro každé dva indexy $m \le n$ díky Δ-ové nerovnosti máme $|s_n - s_m| = \left|\sum_{j=m+1}^n a_j\right| \le \sum_{j=m+1}^n |a_j| = |t_n - t_m|$. Ale (t_n) je Cauchyova (dle věty o CP), takže i (s_n) je Cauchyova. $\square$

Věta 6 (součty AK řad) *Řada $\sum a_n$ je* AK $\iff$ *každé přerovnání $\sum a_{\pi(n)}$ konverguje. Když $\sum a_n$ je* AK, *všechna její přerovnání mají stejný součet.*

Důkaz je/bude v **K**.

- *Úloha.* Každé přerovnání AK řady je tedy AK řada.

Geometrické řady

Jsou to řady tvaru $\sum_{n=0}^\infty q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, kde $q \in \mathbb{R}$ je <u>kvocient</u> řady.

Věta 7 (součet GŘ) *Součet $\sum_{n=0}^\infty q^n$ je $1/(1-q)$ pro $-1 < q < 1$, $+\infty$ pro $q \ge 1$ a neexistuje pro $q \le -1$.*

Důkaz. Pro každé $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí identita

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1} \ .$$

Pro $q < -1$ tedy podle AL máme $\lim s_{2n-1} = +\infty$ a $\lim s_{2n} = -\infty$, tedy $\lim\ s_n$ neexistuje. Pro $q = -1$ je podobně $s_{2n-1} = 1$ a $s_{2n} = 0$, řada opět nemá součet. Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, takže podle AL máme součet $\lim s_n = 1/(1-q)$. Pro $q = 1$ se $s_n = n$, takže máme součet $\lim s_n = +\infty$. Pro $q > 1$ se $\lim q^n = +\infty$ a podle AL máme součet $\lim s_n = +\infty$. $\square$

Aplikace tohoto vzorce: číslo $27.2727272727\ldots$ se rovná zlomku

$$27(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots) = 27 \cdot \frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{27 \cdot 100}{99} = \frac{300}{11} \ .$$

• *Úlohy.* (i) Pro $q \in (-1, 1)$ a $m \in \mathbb{Z}$ (pro $m < 0$ je $q \neq 0$) se

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = q^m/(1-q)\ .$$

(ii) Která geometrická řada je AK?

Zeta (dzéta) funkce $\zeta(s)$

Funkce $\zeta(s)\colon \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ je definovaná řadou v komplexním oboru, ale zde ji definujeme jen pro reálná $s > 1$. Použijeme funkci reálné mocniny a^b pro $a > 0$, kterou zavedeme ve druhé polovině přednášky. Pro $s \in \mathbb{R}$ vezmeme řadu $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$.

> **Věta 8 (o zeta funkci)** *Pro $s \leq 1$ má řada $\zeta(s)$ součet $+\infty$. Pro $s > 1$ řada $\zeta(s)$ (absolutně) konverguje.*

Důkaz je/bude v **K**.

• *Úloha.* Dokažte první tvrzení věty 8.

Švýcarský matematik *Leonhard Euler (1707–1783)* odvodil vzorec pro hodnoty $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}$. Například $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ a $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Vzorec pro hodnoty $\zeta(2n-1)$ není znám. Je ale známo, že $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

Limity funkcí

• *Prstencová okolí a limitní body.* Pro $A \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon > 0$ už známe ε-okolí $U(A, \varepsilon)$. Prstencové ε-okolí prvku A je definováno jako $P(A, \varepsilon) = U(A, \varepsilon) \setminus \{A\}$. Prvek $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, když pro každé ε je $P(L, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$. Množinu limitních bodů množiny $M \subset \mathbb{R}$ označíme jako $L(M)$ ($\subset \mathbb{R}^*$).

• *Úloha.* $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, právě když existuje posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{L\}$ s $\lim a_n = L$.

Definice 9 (značení funkcí) *Pro* $M \subset \mathbb{R}$ *je* $\mathcal{F}(M) := \{f \mid f\colon M \to \mathbb{R}\}$. *Klademe* $\mathcal{R} := \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{F}(M)$. *Definiční obor funkce* $g\colon X \to Y$ *je* $M(g) := X$.

Zobecníme limity z posloupností na funkce. Připomeňme si, že pro $f\colon A \to B$ a $C \subset A$ je $f[C] = \{f(x) \mid x \in C\}$ ($\subset B$).

Definice 10 (limita funkce) $f \in \mathcal{F}(M)$ *a* $A \in L(M)$. *Když pro* $\forall\, \varepsilon$ *existuje* δ, *že* $(*)$ $f[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$, *píšeme* $\lim_{x \to A} f(x) = L$ *a řekneme, že* *f má v A limitu L*.

Limita nezávisí na případné hodnotě $f(A)$. Funkce f nemusí, a pro $A = \pm\infty$ ani nemůže, být v prvku A definovaná. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ s limitou se $\lim a_n = \lim_{x \to +\infty} a(x)$, kde vpravo chápeme posloupnost (a_n) jako funkci $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

- *Důležitá úloha.* Když $A \notin L(M)$, pak pro nějaké δ inkluze $(*)$ přejde v inkluzi $\emptyset \subset U(L, \varepsilon)$, která platí pro každé $L \in \mathbb{R}^*$ (!).

- *Úloha.* Funkce znaménka (signum) $\operatorname{sgn}(x)\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ má hodnotu -1 pro $x < 0$, 0 pro $x = 0$ a 1 pro $x > 0$. Pro každé a vypočítejte limitu $\lim_{x \to a} \operatorname{sgn}(x)$.

Tvrzení 11 (jednoznačné limity) *Limita funkce je jednoznačná – když* $f \in \mathcal{F}(M)$, $K \in L(M)$ *a* $\lim_{x \to K} f(x) = L$ *i* $\lim_{x \to K} f(x) = L'$, *pak* $L = L'$.

Důkaz. Pro $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta$, že *neprázdná* množina $f[P(K, \delta) \cap M]$ je obsažená v $U(L, \varepsilon)$ i v $U(L', \varepsilon)$. Tedy $\forall\, \varepsilon\ \big(U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Podle dřívější úlohy se $L = L'$. $\square$

Heineho definice limity funkce

Jde o redukci limity funkce na limity posloupností.

Věta 12 (Heineho definice) *$f \in \mathcal{F}(M)$ a $K \in L(M)$. Pak $\lim_{x\to K} f(x) = L \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ s $\lim a_n = K$ se $\lim f(a_n) = L$.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim_{x\to K} f(x) = L$, $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ má limitu K a je dáno ε. Pak existuje δ, že pro $\forall\, x \in P(K,\delta) \cap M$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$. Pro toto δ existuje n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \in P(K,\delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

Obměna $\neg \Rightarrow \neg$. Nechť neplatí, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Pak $\exists\, \varepsilon$, že pro $\forall\, \delta\ \exists\, b = b(\delta) \in P(K,\delta) \cap M$ s $f(b) \notin U(L,\varepsilon)$. Pro n v $\mathbb{N}$ vezmeme $\delta = \frac{1}{n}$ a pro $\forall\, n$ *vybereme* bod $b_n = b(\frac{1}{n}) \in P(K, 1/n) \cap M$, že $f(b_n) \notin U(L,\varepsilon)$. Pak $(b_n) \subset M \setminus \{K\}$ a $\lim b_n = K$, ale $\neg\big(\lim f(b_n) = L\big)$. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. $\square$

V důkazu obměny $\neg \Rightarrow \neg$ jsme použili *axiom výběru*. Spočítáme alespoň jednu limitu funkce. Díky identitě $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ se limita $\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\big)$ rovná

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\ .$$

Základní elementární funkce

• *Pět tříd funkcí.* Zavedeme Základní elementární funkce (ZEF), Elementární funkce (EF), Opravdu základní elementární funkce (OZEF), polynomy (POL) a racionální funkce (RAC). Začneme ZEF. <u>Základní elementární funkce</u>, ZEF, jsou konstanty k_c ($c \in \mathbb{R}$), $\exp x$, $\log x$, a^b, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ a $\operatorname{arccot} x$. Jejich přesné definice následují.

• *Konstanty* k_c. Jsou to funkce $k_c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$, $c \in \mathbb{R}$, tímto už jednoznačně určené: $k_c(x) = c$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

• *Exponenciála* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je ze ZEF nejdůležitější. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ položíme $\mathrm{e}^x = \exp(x) = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ (zde $0^0 = 1$).

• *Úloha.* Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je tato řada AK.

Věta 13 (exponenciální identita) *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ se* $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Důkaz je/bude v **K**.

• *Pár vlastností exponenciály.* $\exp 0 = 1$, vždy je $\exp x > 0$ a $\exp(-x) = 1/\exp x$. Vždy $x < y \Rightarrow \exp x < \exp y$. Platí limity $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ a $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$. Exponenciála je bijekce z $\mathbb{R}$ do $(0, +\infty)$.

• *Eulerovo číslo* $\mathrm{e} = 2.71828\ldots$. Je dáno jako $\mathrm{e} = \exp 1 = \sum_{n\ge0} 1/n! = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$.

• *Úloha.* Číslo e je iracionální. Návod: $\sum_{j\ge0} \frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ vynásobte $m!$.

• *(Přirozený) logaritmus* $\log\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Je to inverzní funkce k exponenciále, $\log = \exp^{-1}$. Vlastnosti logaritmu dostaneme invertováním vlastností exponenciály.

• *Vlastnosti logaritmu.* $\log 1 = 0$, vždy se $\log(xy) = \log x + \log y$ a $\log(1/x) = -\log x$. Vždy $x < y \Rightarrow \log x < \log y$. Platí limity $\lim_{x\to0} \log x = -\infty$ a $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$. Logaritmus je bijekce z $(0, +\infty)$ do $\mathbb{R}$.

• *Reálná mocnina a^b.* Zavedeme ji pro <u>základ</u> $a \ge 0$ a libovolný <u>exponent</u> $b \in \mathbb{R}$.

Definice 14 (**a^b**) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pro $a > 0$ definujeme $a^b := \exp(b \log a)$. Pro $b > 0$ klademe $0^b := 0$. Pro každé $a \neq 0$ položíme $a^0 := 1$. Někdy také definujeme $0^0 := 1$.*

Funkce jako $x^3 = x \cdot x \cdot x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo $x^{-1} \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ získáme za chvíli z identity násobením a dělením. Funkci $\sqrt{x} = x^{1/2} \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a obecněji $x^b \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ pro $b > 0$ získáme (spojitým) rozšířením hodnot $\exp(b \log x)$, $x > 0$, o hodnotu $0^b = 0$.

• *Úloha.* Ověřte, že pro číslo $\mathrm{e} = \exp 1$ a každé $x \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{e}^x = \exp x$.

Tvrzení 15 (identity pro mocniny) *Pro kladná reálná čísla a, b & $x, y \in \mathbb{R}$ platí identity*

$$\mathbf{1}.\ (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,\ \ \mathbf{2}.\ a^x \cdot a^y = a^{x+y}\ \&\ \mathbf{3}.\ (a^x)^y = a^{x \cdot y}\ .$$

Důkaz. 1. $(ab)^x = \exp(x \log(ab)) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$. **2.** $a^x a^y = \exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp((x + y) \log a) = a^{x+y}$. **3.** $(a^x)^y = \exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. □

Ale $\big((-1)^2\big)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \neq -1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot 1/2}$.

• *Úloha.* Ukažte, že 0^0 je neurčitý výraz: pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, $A \geq 0$, existují posloupnosti $(a_n) \subset (0, +\infty)$ a $(b_n) \subset \mathbb{R}$, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim\, (a_n)^{b_n} = A$. Nicméně hodnota $0^0 = 1$ se často hodí.

• *Kosinus a sinus.* Funkce $\cos, \sin \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pocházejí z geometrie, ale lze je definovat i řadami. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ položíme $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}/(2n)!$ (zde $0^0 = 1$) a $\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n+1}/(2n+1)!$. Tedy $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cdots$ a $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \cdots$.

• *Úloha.* Dokažte, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ jsou obě řady AK.

Nechť $S = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ je jednotková kružnice v rovině, tedy kružnice se středem v počátku $(0,0)$ a poloměrem 1. Geometricky lze kosinu a sinu rozumět takto:

Věta 16 (o běžkyni) *Nechť $t \in \mathbb{R}$. Běžkyně, jež vyběhne z bodu $(1,0) \in S$ a běží po dráze S jednotkovou rychlostí – pro $t > 0$ (resp. $t \le 0$) proti (resp. po) směru hodinových ručiček – se v čase $|t|$ nachází v bodě $(\cos t, \sin t) \in S$.*

Důkaz je/bude v **K**.

• *Číslo π.* Dvě definice. Jednak $\pi = 3.14159\dots$ je dvojnásobek nejmenšího $x > 0$, že $\cos x = 0$. Dále je 2π neformálně obvod kružnice S – je to čas, kdy běžkyně opět proběhne startem.

• *Vlastnosti sinu a kosinu.* (i) 2π-periodičnost: $\cos(t+2\pi) = \cos t$ a $\sin(t + 2\pi) = \sin t$. (ii) Na $[0, \pi/2]$ sinus roste z 0 do 1. (iii) Pro každé $t \in [0, \pi]$ se $\sin t = \sin(\pi - t)$ a pro každé $t \in [0, 2\pi]$ se $\sin t = -\sin(2\pi - t)$. (iv) Pro každé t se $\cos t = \sin(t + \pi/2)$. (v) Pro každé t je $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. (vi) Pro každé $s, t \in \mathbb{R}$ platí <u>součtové vzorce</u>

$$\begin{aligned}\sin(s \pm t) &= \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t \ \& \\ \cos(s \pm t) &= \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t\ .\end{aligned}$$

• *Úloha.* Odvoďte z těchto vlastností, že $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

• *Eulerův vzorec.* Nechť $t \in \mathbb{R}$ a $i = \sqrt{-1}$ (tj. $i^2 = -1$). Pak, protože $(i^n) = (i, -1, -i, 1, i, -1, \dots)$, se $\exp(it) = \cos t + i \sin t$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

• *Tangens a kotangens.* Jsou definovány jako $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

• *Úloha.* Ukažte, že $M(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{(2m-1)\pi/2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ a že $M(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

• *Arkus sinus a arkus kosinus.* Jde po řadě o inverz k restrikci sinu na $[-\pi/2, \pi/2]$ a kosinu na $[0, \pi]$. Jsou to bijekce $\arcsin\colon [-1,\, 1] \to [-\pi/2,\, \pi/2]$ a $\arccos\colon [-1,\, 1] \to [0,\, \pi]$.

• *Arkus tangens a arkus kotangens.* Jde po řadě o inverz k restrikci tangensu na $(-\pi/2, \pi/2)$ a kotangensu na $(0, \pi)$. Jsou to bijekce $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\, \pi/2)$ a $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\, \pi)$.

Elementární funkce

Definujeme třídu funkcí EF (za níž se často vydává předchozí třída ZEF). Začneme čtyřmi (binárními) operacemi na množině $\mathcal{R}$ (viz definice 9). Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. <u>Součet</u> $f + g\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$. <u>Součin</u> $fg\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(fg)(x) := f(x) \cdot g(x) = f(x)g(x)$. <u>Podíl</u> $f/g\colon M(f) \cap M(g) \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$, kde $Z(g) = \{x \in M(g) \mid g(x) = 0\}$, má hodnoty $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$. Konečně <u>složenina</u> $f(g)\colon M(f(g)) \to \mathbb{R}$, kde $M(f(g)) = \{x \in M(g) \mid g(x) \in M(f)\}$ $(\subset M(g))$, má hodnoty $(f(g))(x) := f(g(x))$.

• *Úloha.* Ukažte, že $M(f(g)) = g^{-1}[g[M(g)] \cap M(f)]$.

Definice 17 (EF) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je <u>elementární</u> $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, že $f_n = f$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $f_i \in \mathrm{ZEF}$ nebo $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j f_k$ nebo $f_i = f_j/f_k$ nebo $f_i = f_j(f_k)$ pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \le j, k < i$.*

Např. identita $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je v EF, protože $\log(\exp x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Místo $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ píšeme obvykle jen x.

• *Úloha.* Nechť $f \in \mathrm{EF}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak i zúžení $f \mid I \in \mathrm{EF}$.

Polynomy a racionální funkce

Definujeme dvě důležité podtřídy elementárních funkcí, polynomy POL a racionální funkce RAC.

Definice 18 (POL) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je <u>polynom</u> $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, že $f_n = f$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je f_i identita $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ nebo konstanta k_c, $c \in \mathbb{R}$, nebo $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j f_k$ pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \leq j, k < i$.*

Pro polynomy p se $M(p) = \mathbb{R}$, pro racionální funkce to ale neplatí.

Definice 19 (RAC) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je <u>racionální funkce</u> $\iff$ v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, že $f_n = f$ a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je f_i identita $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ nebo konstanta k_c, $c \in \mathbb{R}$, nebo $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j f_k$ nebo $f_i = f_j / f_k$ pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \leq j, k < i$.*

Je zřejmé, že $\mathrm{POL}, \mathrm{RAC} \subset \mathrm{EF}$.

• *Úlohy.* Jak vypadá definiční obor racionální funkce? Je prázdná funkce $f = \emptyset$ polynom? Je to racionální funkce?

Opravdu základní elementární funkce

V ZEF je patrně řada zbytečných funkcí, které se dají vyjádřit z ostatních (např. $\cos x = \sin(x + k_{\pi/2})$), a je užitečné identifikovat podstatné členy ZEF. Také není úplně jasné, které funkce jedné proměnné odvozené z reálné mocniny a^b nevyhnutelně potřebujeme.

Definice 20 (OZEF) *Opravdu základními elementárními funkcemi jsou konstanty k_c pro $c \in \mathbb{R}$, $\exp x$, $\log x$, funkce $\{x^b \colon [0, +\infty) \to \mathbb{R} \mid b > 0\}$, $\sin x$ a $\arcsin x$.*

• *Úlohy.* Dokažte, že každá funkce $f \in \mathrm{ZEF} \setminus \mathrm{OZEF}$ se dá vyjádřit (ve stylu definice 17) z funkcí v OZEF.

V definici 17 tak lze ZEF nahradit menší třídou OZEF ($\subset$ ZEF). Definice 17 třídy EF ale stále není úplně uspokojivá: $\sqrt{x}$ jsme dostali do EF jen legislativním rozhodnutím a $\mathrm{sgn}(x) \notin \mathrm{EF}$ (proč?), i když by znaménko možná mělo být elementární funkce ... Viz **K** nebo jinde, časem.

DĚKUJI ZA POZORNOST!