Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 2, 29. 2. 2024

EXISTENCE LIMIT REÁLNÝCH POSLOUPNOSTÍ

• *Opakování a značení.* Co je úplné UT $\mathbb{R}$? Co jsou přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a (s nulou) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$? Písmena i, j, k, l, m, m_0, m_1, $\dots$, n, n_0, n_1, $\dots$ probíhají $\mathbb{N}$. Písmena a, b, c, d, e, δ, ε a θ, případně s indexy, označují reálná čísla. Čísla δ, ε a θ jsou vždy kladná a představujeme si je jako blízká nule. (Reálná) posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset \mathbb{R}$ je vlastně funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Reálné posloupnosti označujeme (a_n), (b_n) a (c_n).

Počítání s nekonečny

K $\mathbb{R}$ přidáme dva nové různé prvky, nekonečna $+\infty$ a $-\infty$. Obě značíme souhrnně jako $\pm\infty$ či $\mp\infty$. Máme rozšířenou reálnou osu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \ .$$

Prvky v $\mathbb{R}^*$ označujeme písmeny A, B, K a L. Nechť N a N' označují $\pm\infty$. Pak $N + A = A + N = N$ pro každé $A \in \mathbb{R}^*$, kromě výrazů $+\infty + (-\infty)$ a $-\infty + (+\infty)$, které jsou neurčité (nedefinované). Dále $N \cdot A = A \cdot N = N'$ pro každé $A \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, s příslušnými znaménky. Výrazy $0 \cdot N$ a $N \cdot 0$ jsou neurčité. Dělení: $a/N = 0$ pro každé $a \in \mathbb{R}$ a $N/a = N'$ pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, s příslušnými znaménky. Výrazy $A/0$ a N/N' jsou neurčité. Dále $-(\pm\infty) = \mp\infty$. Konečně $(\mathbb{R}, <)$ rozšíříme o $-\infty < +\infty$ a $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Odečítání je $A - B := A + (-B)$. Neurčité výrazy jsou tedy právě ($A \in \mathbb{R}^*$)

$$\frac{A}{0},\ (\pm\infty) + (\mp\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \ \text{ a } \ \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\ .$$

Inverzy $(\pm\infty)^{-1}$ nejsou definované, i když $1/\pm\infty = 0$.

• *Úlohy.* Dokažte, že $(\mathbb{R}^*, <)$ je lineární uspořádání a že v něm <u>každá</u> množina $B \subset \mathbb{R}^*$ má supremum i infimum.

• *Okolí bodů a nekonečen.* Připomeneme si značení reálných intervalů: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ a podobně.

> **Definice 1 (ε-okolí)** *$U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ je <u>ε-okolí</u> bodu b. <u>ε-okolí nekonečen</u> jsou $U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$ a $U(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$.*

• *Úlohy.* 1. Když $c \in U(A, \varepsilon)$ a $c < b \le A$ nebo $A \le b < c$, pak i $b \in U(A, \varepsilon)$.

2. $A \neq B \Rightarrow \exists\, \varepsilon$, že $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$.

3. Vždy $\varepsilon \le \delta \Rightarrow U(A, \varepsilon) \subset U(A, \delta)$.

4. Vždy $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(a, 1/k) = \{a\}$ a $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(\pm\infty, 1/k) = \emptyset$.

Limity reálných posloupností

Následující definice je základní.

> **Definice 2 (limity)** *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}^*$. Pokud pro každé ε existuje n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$, píšeme, že* $\lim a_n = L$ *či* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *či $a_n \to L$, a řekneme, že posloupnost (a_n) má <u>limitu L</u>.*

Když $L \in \mathbb{R}$, pak (a_n) má <u>vlastní</u> limitu a <u>konverguje</u>. Když $L = \pm\infty$, pak (a_n) má <u>nevlastní</u> limitu. Posloupnost <u>diverguje</u>, když nemá limitu nebo má nevlastní limitu. Vlastní limita $\lim a_n = a$ znamená, že pro každé reálné (a jakkoli malé) $\varepsilon > 0$ existuje index

$n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \geq n_0$ je vzdálenost mezi a_n a a menší než ε, to jest $|a_n - a| < \varepsilon$. Nevlastní limita $\lim a_n = -\infty$ znamená, že pro každé (a jakkoli záporné) c existuje index n_0, že pro každý index $n \geq n_0$ je $a_n < c$. Opačná nerovnost dává limitu $+\infty$. Eventuálně konstantní posloupnost (a_n) s $a_n = a$ pro každé $n \geq n_0$ je příklad konvergentní posloupnosti, samozřejmě s limitou $\lim a_n = a$.

Nechť $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností. Množinám $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ říkáme vlastnosti (reálných posloupností).

Definice 3 (robustnost) *$V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je robustní vlastnost, když vždy platí implikace $(a_n) \in V \Rightarrow (b_n) \in V$, pakliže $a_n \neq b_n$ jen pro konečně mnoho indexů n.*

• *Úlohy.* Která z vlastností V_i je robustní? $V_1 \ldots (a_n)$ konverguje, $V_2 \ldots (a_n)$ diverguje, $V_3 \ldots \lim a_n = -\infty$ a $V_4 \ldots a_1 = 0$.

Tvrzení 4 (jednoznačné limity) *Limita posloupnosti je jednoznačná,* $\lim a_n = K \wedge \lim a_n = L \Rightarrow K = L$.

Důkaz. Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a ε je libovolné. Podle definice 2 existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Tedy $\forall\, \varepsilon \big(U(K,\varepsilon) \cap U(L,\varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Dle 2 v úloze výše se $K = L$. $\square$

• *Dvě limity.* Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Což je jasné, pro dané ε a každé $n \geq n_0 = 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\underbrace{1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil}_{> 1/\varepsilon}} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \rightsquigarrow 1/n \in U(0,\, \varepsilon)\;.$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje <u>horní celou část</u> čísla a, je to nejmenší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \geq a$. Podobně <u>dolní celá část</u> $\lfloor a \rfloor$ čísla a je největší $v \in \mathbb{Z}$, že $v \leq a$. Dále spočítáme, že

$$\sqrt[3]{n} - \sqrt{n} \to -\infty \ .$$

Pro dané $c < 0$ totiž pro každé $n \geq n_0 > \max(\{4c^2, 2^6\})$ je

$$\overbrace{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}^{\text{netriviální}} = \overbrace{n^{1/2} \cdot \underbrace{(n^{-1/6} - 1)}_{\cdots < -1/2}}^{\text{triviální}} < \underbrace{-n^{1/2}}_{\cdots < -2|c|} /2 < -2|c|/2 = c \ .$$

První horní svorka říká, že v tomto tvaru je hledaná limita netriviální, je to neurčitý výraz $+\infty - (+\infty)$. Jednoduchou algebraickou úpravou ji ale převedeme do triviálního tvaru $(+\infty) \cdot (0 - 1) = -\infty$. Dolní svorky udávají horní meze pro výrazy uzavřené svorkou za předpokladu, že $n \geq n_0$.

Podposloupnosti posloupností

Podposloupnost vznikne z dané posloupnosti vypuštěním několika jejích členů tak, že stále zbývá nekonečná posloupnost.

> **Definice 5 (podposloupnosti)** (b_n) *je <u>podposloupností</u> posloupnosti* (a_n)*, psáno* $(b_n) \preceq (a_n)$*, existuje-li taková posloupnost přirozených čísel* $m_1 < m_2 < \ldots$*, že pro každé* n *se* $b_n = a_{m_n}$.

Relace $\preceq$ na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je zřejmě reflexivní a tranzitivní.

- *Úloha.* Popište takové dvě různé posloupnosti (a_n) a (b_n), že $(a_n) \preceq (b_n)$ i $(b_n) \preceq (a_n)$.

Tvrzení 6 (limity podposloupností) *Když je* $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$ *a* $(b_n) \preceq (a_n)$, *pak* $\lim b_n = L$.

Důkaz. Plyne hned z definic 2 a 5, protože posloupnost (m_n) v poslední definici splňuje, že $m_n \geq n$ pro každé n. □

Z následujícího užitečného tvrzení později dokážeme jen první část.

Tvrzení 7 (o podposloupnostech) *Platí následující.*

1. *Každá posloupnost* (a_n) *má podposloupnost, která má limitu.*
2. *Posloupnost* (a_n) *nemá limitu* $\iff$ (a_n) *má dvě podposloupnosti s různými limitami.*
3. *Neplatí, že* $\lim a_n = A$ $\iff$ (a_n) *má podposloupnost s limitou* $L \neq A$.

Neexistenci limity tak vždy můžeme dokázat dvěma podposloupnostmi s různými limitami. Například

$$(a_n) = ((-1)^n) = (-1,\, 1,\, -1,\, 1,\, -1,\, 1,\, \dots)$$

nemá limitu, protože $(1, 1, \dots) \preceq (a_n)$ i $(-1, -1, \dots) \preceq (a_n)$.

- *Úlohy.* Dokažte druhou a třetí část tvrzení 7.

Limita $\lim \sqrt[n]{n}$

Triviální limita nevede na neurčité výrazy. Jinak máme netriviální limitu. Limity $\lim\,(2^n + 3^n)$ a $\lim \frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto $\lim\,(2^n - 3^n)$ a $\lim \frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Netriviální limitu často spočítáme algebraickou úpravou na triviální limitu, viz $\lim \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}\right)$ výše.

Následující $\lim n^{1/n}$ je netriviální, protože $n \to +\infty$, ale $1/n \to 0$ a i $(+\infty)^0$ je neurčitý výraz. Exponent ale převládne a $n^{1/n} \to 1$. Tuto limitu nespočítáme algebraickou úpravou, ale z definice pomocí následující binomické věty.

- *Úloha.* Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ se $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$, kde $\binom{n}{j} = n(n-1)\dots(n-j+1)/j!$.

Tvrzení 8 **($n^{1/n} \to 1$)** $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Důkaz. Vždy $n^{1/n} \geq 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by $c > 0$ a posloupnost přir. čísel $2 \leq n_1 < n_2 < \dots$, že pro každé i je $n_i^{1/n_i} \geq 1 + c$. Podle binomické věty by pak pro každé i bylo

$$\begin{aligned} n_i &\geq (1+c)^{n_i} = \textstyle\sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \dots + \binom{n_i}{2} c^2 + \dots + \binom{n_i}{n_i} c^{n_i} \\ &\geq \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \,. \end{aligned}$$

Pro každé i pak je $n_i \geq (n_i(n_i-1)/2) \cdot c^2$ a tedy $1 + 2/c^2 \geq n_i$. To je spor, posloupnost $n_1 < n_2 < \dots$ není shora omezená. □

Limity monotónních posloupností

Uvedeme pět vět (9, 11, 14, 16 a 17) o existenci limit. Pro první z nich definujeme monotónní posloupnosti. Řekneme, že posloupnost (a_n) neklesá (resp. neroste), když pro $\forall\, n$ je $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$). Klesá (resp. roste), když pro $\forall\, n$ je $a_n > a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$). Je monotónní, když neklesá nebo neroste. Posloupnost je ryze monotónní, když klesá nebo roste.

Posloupnost (a_n) je shora omezená, pokud existuje c, že pro každé n je $a_n \leq c$, jinak je (a_n) shora neomezená. Otočením nerovnosti máme omezenost zdola, resp. neomezenost zdola. Posloupnost (a_n) je omezená, je-li shora i zdola omezená.

Věta 9 (limity monot. posloupností) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *neklesá, popř. neroste.* *Pak* *limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se* $\sup\big(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big)$, *popř.* $\inf\big(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}\big)$. *Supremum a infimum zde bereme v* $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť (a_n) neroste (případ neklesající (a_n) je podobný), $A \in \mathbb{R}^*$ je uvedené infimum a je dáno ε. Vezmeme $c > A$ tak, že $c \in U(A, \varepsilon)$. Podle definice infima je $a_m < c$ pro nějaké m. Pro každé $n \geq m$ pak je $A \leq a_n \leq a_m < c$. Tedy, podle části 1 úlohy výše, $a_n \in U(A, \varepsilon)$ a $\lim a_n = A$. $\square$

Monotonie (a_n) ale není robustní vlastnost. Důsledek to napraví.

Důsledek 10 (robustní) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má podposloupnost* $(a_m, a_{m+1}, \dots)$, *která neklesá, popř. neroste.* *Pak* *limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se* $\sup(\{a_n \mid n \geq m\})$, *popř.* $\inf(\{a_n \mid n \geq m\})$. *Supremum a infimum je opět v* $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Je jasné, že limita podposloupnosti $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ je limita celé posloupnosti (a_n). $\square$

• *Kvazimonotónní posloupnosti.* Zobecníme monotónní posloupnosti. Řekneme, že (a_n) kvazineklesá (popř. kvazineroste), pokud pro každé n existuje jen konečně mnoho m, že $a_m < a_n$ (popř. $a_m > a_n$).

• *Úloha.* Dokažte, že když (a_n) neklesá (popř. neroste), pak kvazineklesá (popř. kvazineroste).

Následující věta, kterou nedokážeme, používá veličiny $\limsup$ a $\liminf$ posloupnosti. Ty jsou vždy definované, mají hodnoty v $\mathbb{R}^*$

a zavedeme je v příští přednášce.

Věta 11 (kvazim. posloupnosti) *Když posl.* (a_n) *kvazi-neklesá, popř. kvazineroste, pak* $\lim a_n$ *existuje a rovná se* $\limsup a_n \in \mathbb{R}^*$*, popř.* $\liminf a_n \in \mathbb{R}^*$.

Snadno se zformuluje robustní důsledek analogický důsledku 10. Kvazimonotónní posloupnosti zavedl anglický matematik *Godfrey H. Hardy (1877–1947)*.

Bolzano–Weierstrassova věta

Použijeme pomocný výsledek, který je sám o sobě zajímavý.

Tvrzení 12 (monotónní podposl.) *Každá posloupnost reálných čísel* (a_n) *má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Pro danou (a_n) vezmeme množinu $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \le m \Rightarrow a_n \ge a_m\}$. Když je M nekonečná, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$, máme nerostoucí podposloupnost $a_{m_1} \ge a_{m_2} \ge \dots$. Když je M konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$ (pro $M = \emptyset$ je m_1 libovolné). Pak jistě $m_1 \notin M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \notin M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$, a tak dál. Máme rostoucí podposloupnost $a_{m_1} < a_{m_2} < \dots$. □

Z věty 9 a předešlého tvrzení plynou dva následující výsledky. První z nich je část 1 tvrzení 7.

Důsledek 13 (podposl. s limitami) *Každá reálná posloupnost má podposloupnost, která má limitu.*

Věta 14 (Bolzano–Weierstrassova) *Omezená posloupnost reálných čísel má vždy konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená předešlým tvrzením. Patrně je (b_n) omezená a podle věty 9 má vlastní limitu. $\square$

Německý matematik *Karl Weierstrass (1815–1897)* je považován za „otce“ moderní matematické analýzy. Kněz, filosof a matematik *Bernard Bolzano (1781–1848)* měl italské, německé a české kořeny. V Praze je po něm nazvána ulice u Hlavního nádraží, v Celetné ulici ho připomíná pamětní deska a na Olšanských hřbitovech se nachází jeho hrob.

- *Úloha.* Udělejte si procházku po Praze po těchto místech.

Cauchyova podmínka

S Cauchyovými posloupnostmi jsme se už setkali v definici $\mathbb{R}$.

Definice 15 (cauchyovost) $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *je Cauchyova (též cauchyovská), pokud pro každé* ε *existuje* n_0*, že* $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon$.

Cauchyovost posloupnosti reálných čísel je robustní vlastnost.

- *Úloha.* Každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.

Věta 16 (Cauchyova podmínka) *Posloupnost reálných čísel* (a_n) *je konvergentní* $\iff$ (a_n) *je Cauchyova.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno ε. Pak existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon/2$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq$

$|a_m - a| + |a - a_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ a (a_n) je Cauchyova. Použili jsme vyjádření $a_m - a_n = (a_m - a) + (a - a_n)$ a Δ-ovou nerovnost $|c + d| \leq |c| + |d|$.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť (a_n) je Cauchyova posloupnost. Podle úlohy je (a_n) omezená. Proto má podle Bolzano–Weierstrassovy věty konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε tak máme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| \leq \varepsilon/2$ a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, takže $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Tedy $a_n \to a$. □

Je zajímavé, že francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)* pobýval v letech 1833–38 v politickém exilu v Praze.

• *Úlohy.* V oboru zlomků $\mathbb{Q}$ předešlá věta neplatí. Kde jsme v posledním důkazu použili úplnost $\mathbb{R}$?

Feketeho lemma

Maďarsko-izraelský matematik *Michael Fekete (1886–1957)* byl v letech 1946–48 rektorem Hebrejské Univerzity v Jeruzalémě. Dříve učil v Budapešti *Johna (Jánose) von Neumanna (1903–1957).*

• *Úloha.* fekete $=?$

Posloupnost (a_n) je superaditivní, popř. subaditivní, pokud pro každé indexy m a n je $a_{m+n} \geq a_m + a_n$, popř. $a_{m+n} \leq a_m + a_n$.

Věta 17 (Feketeho lemma) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *a nechť* $M = \{a_n/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Když* (a_n) *je superaditivní, popř. subaditivní, pak* $\lim \frac{a_n}{n} = \sup(M)$, *popř.* $\lim \frac{a_n}{n} = \inf(M)$. *Supremum a infimum zde bereme v* $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť (a_n) je superaditivní (pro subaditivní posloupnosti je argument podobný) a je dáno ε. Vezmeme $c < \sup(M)$ tak, že

$c \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Podle definice suprema existuje m, že $a_m/m > c$. Nechť $n \geq m$ je libovolné. Napíšeme ho jako $n = km + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \leq l < m$ (tj. n vydělíme m se zbytkem). Díky superaditivitě je

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_m/m}{1 + l/km} + \frac{a_l}{n}\ .$$

Pro $n \to \infty$ i $k \to \infty$, tedy $1 + l/km \to 1$ a $a_l/n \to 0$. Existuje $n_0 \geq m$, že pro každé $n \geq n_0$ je $c < a_n/n \leq \sup(M)$. Část 1 úlohy výše dává, že $a_n/n \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Tedy $a_n/n \to \sup(M)$. $\square$

Feketeho lemma se dá občas použít v extremální kombinatorice. Někdy lze pomocí něj dokázat, že uvažovaná extremální funkce je zhruba lineární. Uvedeme si jeden příklad.

• *Kombinatorické úlohy o abab-prostých slovech.* Nechť $f(n) = l$ je maximální délka l slova $u = a_1a_2 \ldots a_l$ nad n-prvkovou abecedou (např. $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) splňujícího dvě podmínky.

1. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, l - 1$ je $a_i \neq a_{i+1}$.
2. Slovo u neobsahuje podslovo typu $abab$, tj. neexistují čtyři indexy $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq l$, že $a_{k_1} = a_{k_3} \neq a_{k_2} = a_{k_4}$.

a) Ukažte, že vždy $f(n) < +\infty$.

b) Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim f(n)/n$.

c) Dokažte, že $f(n) = 2n - 1$.

• *Ještě jedna úloha.* Zformulujte a dokažte robustní verzi Feketeho lemmatu.

DĚKUJI ZA POZORNOST