Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 11, 2. 5. 2024

NEWTONŮV INTEGRÁL. PF RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ. J. LIOUVILLE A M. ROSENLICHT

Opakování Newtonova integrálu

Připomeňme si definici Newtonova integrálu v minulé přednášce. Pro $A < B$ v $\mathbb{R}^*$ a funkce $F, f \in \mathcal{F}((A, B))$ s $F = \int f$ definujeme Newtonův integrál funkce f od A do B jako rozdíl limit

$$(\mathrm{N}) \int_A^B f = F_B - F_A := \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)\ ,$$

jsou-li obě vlastní. Položíme $(\mathrm{N}) \int_A^A f := 0$ a pro $B < A$ také $(\mathrm{N}) \int_A^B f := -(\mathrm{N}) \int_B^A f$. Je-li $(\mathrm{N}) \int_A^B f$ definovaný, řekneme, že f je newtonovsky integrovatelná od A do B, a píšeme $f \in \mathcal{N}(A,\, B)$.

- *Úmluva.* V této přednášce zápis Newtonova integrálu zkrátíme z $(\mathrm{N}) \int_A^B f$ na $\int_A^B f$, Riemannův integrál totiž dnes neuvažujeme.
- *Úloha.* Ukažte, že pro $A \le K < L \le B$ platí, že $f \in \mathcal{N}(A, B)$ $\Rightarrow f \mid (K, L) \in \mathcal{N}(K, L)$.

Pak píšeme jednodušeji $f \in \mathcal{N}(K, L)$. Např. $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{N}(0, +\infty)$ a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \arctan_{+\infty} - \arctan_0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$. Trochu obecněji definujeme pro netriviální interval $I \subset \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}(I)$ integrál $\int_I f$ jako $\int_A^B f$, kde $A = \inf(I)$ a $B = \sup(I)$. Pro $F \in \mathcal{R}$ a $A, B \in \mathbb{R}^*$ zavádíme zápis

$$[F]_A^B := F_B - F_A := \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x)\ (\in \mathbb{R})\ ,$$

jsou-li obě limity definované a vlastní. Aditivitu N. integrálu jsme dokázali minule, dnes ji trochu zobecníme.

Tvrzení 1 (aditivita N. $\int$) *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, $D := \min(\{A, B, C\})$, $E := \max(\{A, B, C\})$ a $f \in \mathcal{N}(D, E)$. Pak*

$$\int_A^C f = \int_A^B f + \int_B^C f\ ,\ \text{tj. } S := \int_A^B f + \int_B^C f + \int_C^A f = 0\,.$$

Důkaz. Nechť $A, \ldots, E$ a f jsou, jak uvedeno. Dokážeme druhou formulaci, že $S = 0$. Pokud $|\{A, B, C\}| \le 2$, tvrzení triviálně platí. Nechť $|\{A, B, C\}| = 3$, $\{A, B, C\} = \{D < G < E\}$ a $F = \int f$. Podle úlohy výše všechny tři integrály v S existují. Tedy $\int_D^G f = \lim_{x\to G^-} F(x) - F_D$, $\int_G^E f = F_E - \lim_{x\to G^+} F(x)$ a $\int_E^D f = -\int_D^E f = F_D - F_E$. Protože $\lim_{x\to G^-} F(x) = F(G) = \lim_{x\to G^+} F(x)$, součet těchto tří integrálů je 0. $\square$

Minule jsme také dokázali monotonii N. integrálu, že když f, g jsou v $\mathcal{N}(A, B)$ a $f \le g$, tak $\int_A^B f \le \int_A^B g$.

Výpočty Newtonových integrálů

- *Linearita.* Integrál lineární kombinace je kombinace integrálů.

Tvrzení 2 (linearita) $\int_A^B (af + bg) = a\int_A^B f + b\int_A^B g$, *je-li pravá strana definovaná.*

Důkaz. Nechť $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, $f, g \in \mathcal{N}(A, B)$, $F = \int f$ a $G = \int g$. Pak $aF + bG = \int(af + bg)$ a máme, že $a\int_A^B f + b\int_A^B g = a(F_B - F_A) + b(G_B - G_A) = aF_B + bG_B - (aF_A + bG_A) = (aF + bG)_B - (aF + bG)_A = \int_A^B (af + bg)$ (dle AL funkcí). $\square$

- *Integrace per partes.* Tento vzorec dobře známe z partie o primitivních funkcích. Pro N. integrály má následující podobu.

Věta 3 (per partes) *Nechť $f, g, F, G \in \mathcal{F}((A,B))$, $F = \int f$ a $G = \int g$. Pak se $\int_A^B fG = [FG]_A^B - \int_A^B Fg$, jakmile jsou v této rovnosti definované dva ze tří členů.*

Důkaz. Nechť je definovaný první a druhý. Tedy $[FG]_A^B =: T_2$ a pro $H = \int fG$ máme $[H]_A^B =: T_1$, přičemž $T_i \in \mathbb{R}$. Pak

$$(FG - H)' = fG + Fg - fG = Fg \;\text{ a }\; [FG - H]_A^B = T_2 - T_1\,.$$

Tedy $FG - H = \int Fg$ a $T_1 = T_2 - \int_A^B Fg$.

Nechť je definovaný první a třetí. Takže $H_1 = \int fG$, $H_2 = \int Fg$, $[H_1]_A^B =: T_1$ a $[H_2]_A^B =: T_3$, $T_i \in \mathbb{R}$. Pak $(H_1 + H_2)' = fG + Fg = (FG)'$. Podle věty 14 v př. 9 existuje $c \in \mathbb{R}$, že $H_1 + H_2 + k_c = FG$. Proto

$$[FG]_A^B = [H_1 + H_2 + k_c]_A^B = [H_1]_A^B + [H_2]_A^B = T_1 + T_3$$

a $T_1 = [FG]_A^B - T_3$. Případ definovaného druhého a třetího členu je podobný prvnímu případu. $\square$

Eulerův integrál

Tvrzení 4 ($n! = \int$) *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ se $\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = n!$.*

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ tento N. integrál označíme jako I_n. Indukcí podle n současně dokážeme jeho existenci a určíme jeho hodnotu. $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 = 0!$. Nechť $n > 0$. Pak podle předešlé věty se $I_n = \int_0^{+\infty} x^n(-\mathrm{e}^{-x})' \overset{\mathrm{PP}}{=} [-x^n\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(x^n)'\mathrm{e}^{-x} = -0 - (-0) + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = nI_{n-1}$. V PP je definovaný druhý a třetí člen. Takže $I_n = n \cdot (n-1)! = n!$. $\square$

Integrace substitucí

Dva substituční vzorce z minula upravíme pro Newtonův integrál.

Věta 5 (substituce) *$A, B, C, D \in \mathbb{R}^*$, $A < B$, $C < D$, $g\colon (A, B) \to (C, D)$, $D(g) = (A, B)$ a $f \in \mathcal{F}((C, D))$. Pak platí následující.*
(1) f má prim. funkci $\Rightarrow \int_A^B f(g) \cdot g' = \int_{g_A}^{g_B} f$, je-li pravá strana definovaná.
(2) Když g je surjekce a $g' \neq 0$, pak $\{g_C^{-1}, g_D^{-1}\} = \{A, B\}$ a $\int_C^D f = \int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g) \cdot g'$, je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Nechť $A, \dots, D$, g a f jsou, jak je uvedeno. **1.** Nechť $F = \int f$ a existuje $\int_{g_A}^{g_B} f$. Tedy existují limity $g_A := \lim_{x \to A} g(x)$ a $g_B := \lim_{x \to B} g(x)$ ($\in \mathbb{R}^*$) a zřejmě leží v $L((C, D))$. Pravá strana se tak rovná $F_{g_B} - F_{g_A} = \lim_{y \to g_B} F(y) - \lim_{y \to g_A} F(y)$, speciálně dvě poslední limity existují a jsou vlastní. Zřejmě $F(g) = \int f(g) \cdot g'$. Tedy $\int_{g_A}^{g_B} f = \lim_{y \to g_B} F(y) - \lim_{y \to g_A} F(y)$ se podle věty o limitě složené funkce (věta 10 v př. 5) se splněnou první podmínkou (funkce F je spojitá) rovná

$$\lim_{x \to B} F(g(x)) - \lim_{x \to A} F(g(x)) = \int_A^B f(g) \cdot g' \,.$$

2. Nechť g je na, g' je nenulová a existuje $\int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g) \cdot g'$. Víme, že g i g^{-1} je rostoucí nebo klesající bijekce a že g^{-1} je spojitá (část 2 věty 22 v př. 6). Tedy limity $g_C^{-1} := \lim_{y \to C} g^{-1}(y)$ a $g_D^{-1} := \lim_{y \to D} g^{-1}(y)$ ($\in \mathbb{R}^*$) existují a je $\{g_C^{-1}, g_D^{-1}\} = \{A, B\}$. Díky předpokladu máme $G = \int f(g) \cdot g'$ a pravá strana má hodnotu $\lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x)$. Víme, že $G(g^{-1}) = \int f$. Takže $\int_{g_C^{-1}}^{g_D^{-1}} f(g) g' = \lim_{x \to g_D^{-1}} G(x) - \lim_{x \to g_C^{-1}} G(x)$ se podle věty o limitě složené funkce rovná

$$\lim_{y\to D} G(g^{-1}(y)) - \lim_{y\to C} G(g^{-1}(y)) = \int_C^D f\ .$$

$\square$

Newtonův integrál a plocha pod grafem

Přirozeně se nabízí otázka o vztahu Newtonova integrálu a plochy pod grafem (nezáporné) funkce. Minule jsme dokázali větu 16 o rovnosti plochy pod grafem a Riemannova integrálu. Analogická věta platí i pro Newtonův integrál.

Věta 6 (PG a N. $\int$) $f \in \mathcal{F}([a,b]) \cap \mathcal{N}(a,b)$ & $f \geq 0$. *Pak se* $\mathrm{PG}(f) = (\mathrm{N}) \int_a^b f$.

Hodnoty funkce $f(a)$ & $f(b)$ jsou zde nepodstatné. V tvrzení 18 jsme minule uvedli příklad funkce $f \in \mathcal{F}([0,1])$ s $\mathrm{PG}(f) = (\mathrm{N}) \int_0^1 f = 2$, která nemá Riemannův integrál. Větu 6 dokážeme později pomocí H.–K. integrálu.

Primitivní funkce některých elementárních funkcí

Obrácením pravidel pro derivování uvedených v závěru 7. př. dostaneme bez práce následující vzorce.

1. Na $\mathbb{R}$ se $\int \exp x = \exp x$, $\int \sin x = -\cos x$, $\int \cos x = \sin x$, $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$, $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $\int k_c = cx$ $(= k_c \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$.
2. Na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ se $\int 1/x = \log(|x|)$ a $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ pro $n \in \{-2, -3, \ldots\}$.
3. Na $(0, +\infty)$ se $\int x^b = \frac{x^{b+1}}{b+1}$ pro $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4. <u>Na $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$</u>, $k \in \mathbb{Z}$, se $\int \frac{1}{(\cos x)^2} = \tan x$.

5. <u>Na $(k\pi, (k+1)\pi)$</u>, $k \in \mathbb{Z}$, se $\int \frac{1}{(\sin x)^2} = -\cot x$.

6. <u>Na $(-1, 1)$</u> se $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$.

Obecnější Newtonovy integrály

Víme, že funkce $\operatorname{sgn} x \notin \mathcal{N}(-1, 1)$, protože na $(-1, 1)$ nemá primitivní funkci. Uvažují se ale i obecnější antiderivace F, které v rovnostech $F'(x) = f(x)$ povolují výjimky v několika bodech x, a s nimi se už spočte, že $(\mathrm{N}^+) \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x = 0$.

Výpočet antiderivace racionální funkce

• *Co je racionální funkce?* Ve 4. př. jsme racionální funkce definovali jako funkce, které vzniknou z identické funkce x ($= \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$) a z konstantních funkcí c ($= k_c$), $c \in \mathbb{R}$, sčítáním, násobením a *dělením*. Připomeňte si, co jsou polynomy, a větu 1 o kanonickém tvaru polynomu v př. 9. Následující větu tu nedokazujeme.

> **Věta 7 (**RAC **a** POL**)** *Když je $r \in$ RAC, <u>potom</u> r je buď prázdná, $r = \emptyset$, anebo existují polynomy p a q, že $q \neq k_0$ a $r = p/q$.*

Je jasné, že pak $M(r) = \mathbb{R} \setminus Z(q)$. Jak víme, $|Z(q)| \leq \deg q$. Na rozdíl od kanonického tvaru polynomu toto vyjádření racionální funkce není jednoznačné, např. $1/x$, $2/(2x)$ ($= k_2/(k_2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$) a x/x^2 je tatáž racionální funkce r s $M(r) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jednoznačnými kanonickými tvary racionálních funkcí se tu nebudeme zabývat.

• *Ireducibilní trojčleny.* <u>Monický</u> polynom má <u>vedoucí koeficient</u> 1. Monický polynom $x^2 + bx + c$ s diskriminantem $b^2 - 4c < 0$ je ireducibilní trojčlen, krátce IT. Nemá tedy reálné kořeny a na $\mathbb{R}$ má jen kladné hodnoty. Např. $x^2 + 2x + 2$ je IT.

- *Antiderivace racionálních funkcí.* Vypadají následovně.

Věta 8 ($\int r$) *Každá $r = \frac{p}{q} \in$ RAC má na každém netriviálním intervalu $I \subset M(r)$ antiderivaci $R = \int r$ tvaru*

$$R(x) = r_0(x) + \textstyle\sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x - \alpha_i|) + \\ + \textstyle\sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i \cdot \arctan(b_i(x)) \ ,$$

kde $r_0 \in$ RAC, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, prázdné součty se definují jako nuly, $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(q)$, a_i jsou ITy *a $b_i \in$ POL *mají* $\deg b_i = 1$.

Funkce těchto čtyř typů se v $R(x)$ mohou všechny objevit. Např. na libovolném netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ se

$$\textstyle\int r(x) := \int \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{x^2+2x+2}\right) \\ = -\frac{1}{3x^3} + \log(|x-1|) + \log(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x+1)$$

— kontrola zderivováním je snadná. Pro důkaz věty 8 potřebujeme teorii parciálních zlomků.

Parciální zlomky

- *Ještě* MLPy*.* Zkratkou MLP označíme monický lineární polynom, polynom tvaru $x + k_a$, $a \in \mathbb{R}$.

- *Úloha.* Dva různé MLPy a ITy nemají společný kořen $\alpha \in \mathbb{C}$.

Následující větu tu nebudeme dokazovat.

Věta 9 (reálné ired. rozklady) *Každý* $p \in \mathrm{POL} \setminus \{k_0\}$ *lze psát jednoznačně jako součin* $p = k_c \cdot \prod_{i=1}^{k} p_i \cdot \prod_{i=1}^{l} q_i$, *kde* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, p_i *jsou* MLPy *a* q_i *jsou* ITy.

Jako obvykle prázdný součin ($k = 0$ či $l = 0$) se definuje jako 1 (tj. k_1). „Jednoznačně“ zde znamená jednoznačně až na pořadí činitelů. Součin $p = k_c \prod_{i=1}^{k} p_i \prod_{i=1}^{l} q_i$ je <u>ireducibilní rozklad</u> polynomu p. Dva nenulové polynomy jsou <u>nesoudělné</u>, pokud jejich ireducibilní rozklady nemají žádný společný MLP ani IT. Zřejmě $Z(p) = \bigcup_{i=1}^{k} Z(p_i)$.

Tvrzení 10 (Bachetova identita) *Pro jakékoli dva nesoudělné polynomy* p *a* q *existují polynomy* r *a* s, *že* $rp + sq = k_1$. *Tedy* $k_1/pq = s/p + r/q$.

Důkaz. Nechť $p, q \in \mathrm{POL}$ jsou nesoudělné a nechť $S := \{rp + sq \mid r, s \in \mathrm{POL}\}$. Nechť $t \in S$, $t \neq k_0$, má nejmenší stupeň. Libovolný $a \in S$ jím dělíme se zbytkem: $a = tb + c$, kde $b, c \in \mathrm{POL}$ a $\deg c < \deg t$ nebo $c = k_0$. Ale $c = a - b \cdot t \in S$ (úloha níže). Polynom c je tedy nulový a $a = bt$, takže t dělí každý prvek v S. Ale $p, q \in S$ a t je oba dělí. Protože p a q jsou nesoudělné polynomy, t je nenulový konstantní polynom. Búno $t = k_1$. Tedy $k_1 \in S$, což je uvedená identita. $\square$

- *Úloha.* Proč c leží v S?

Věta 11 (parciální zlomky) *Každá* $r = \frac{p}{q} \in \mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$ *má vyjádření ve tvaru*

$$r = s + \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{i,j}/p_i^j + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}/q_i^j\ ,$$

kde $s \in \mathrm{POL}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$, p_i *jsou různé* MLPy, $r_{i,j}$ *jsou polynomy s* $\deg r_{i,j} \le 1$ *a* q_i *jsou různé* ITy.

Důkaz. Nechť $r = p/q$ je neprázdná racionální funkce. Jmenovatel q napíšeme jako $q = k_c \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} \prod_{i=1}^{l} q_i^{n_i}$, kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, k, l jsou v $\mathbb{N}_0$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, p_i jsou *různé* MLPy a q_i jsou *různé* ITy. Podle Bachetovy identity se

$$p/q = \textstyle\sum_{i=1}^{k} pb_i/p_i^{m_i} + \sum_{i=1}^{l} pr_i/q_i^{n_i}$$

pro nějaké $b_i, r_i \in \mathrm{POL}$. Polynom pb_i dělíme polynomem $p_i^{m_i}$ se zbytkem: $pb_i/p_i^{m_i} = s_i + t_i/p_i^{m_i}$, kde $s_i, t_i \in \mathrm{POL}$ a $t_i = k_0$ nebo $\deg t_i < m_i = \deg p_i^{m_i}$. Dále můžeme t_i napsat jako lineární kombinaci $t_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{i,m_i-j+1} p_i^{j-1}$ s $\beta_{i,j} \in \mathbb{R}$ (samozřejmě $\beta_{i,j} = k_{\beta_{i,j}}$ atd.). Podobně dostaneme vyjádření $pr_i/q_i^{n_i} = u_i + v_i/q_i^{n_i}$, kde u_i, v_i jsou v POL a $v_i = k_0$ nebo $\deg v_i < 2n_i = \deg q_i^{n_i}$, a $v_i = \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,n_i-j+1} q_i^{j-1}$, kde $r_{i,j} \in \mathrm{POL}$ s $\deg r_{i,j} \le 1$. Takže p/q se rovná

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} s_i + \sum_{i=1}^{l} u_i + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{i,j}/p_i^j + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} r_{i,j}/q_i^j\ ,$$

což je požadované vyjádření racionální funkce p/q. □

Důkaz věty 8

S pomocí předchozí věty vyjádříme danou neprázdnou $p/q \in \mathrm{RAC}$

součtem parciálních zlomků:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j}x + \delta_{i,j}}{q_i(x)^j}\ ,$$

kde $s(x)$ je polynom, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ a $\delta_{i,j}$ jsou v $\mathbb{R}$, α_i jsou různé reálné kořeny polynomu q a $q_i(x)$ jsou různé ITy.

Podle linearity stačí nalézt antiderivaci ke každému sčítanci zvlášť. První dva členy jsou snadné: $\int s(x)$ je polynom na každém I, $\int \frac{\beta}{(x-\alpha)^j} = \frac{-\beta}{(j-1)(x-\alpha)^{j-1}}$ pro $j \geq 2$ na každém I a $\int \frac{\beta}{x-\alpha} = \beta\log(|x-\alpha|)$ na každém $I \subset \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. V R dostáváme členy prvních dvou typů ve větě 8.

Najdeme antiderivaci $\int(\gamma x + \delta)/(x^2 + bx + c)^j$, kde $j \in \mathbb{N}$ a $\gamma, \delta, b, c \in \mathbb{R}$ splňují, že $b^2 - 4c < 0$. Pomocí $d := \sqrt{c - b^2/4} > 0$ a $e := (\delta - \gamma b/2)/d^{2j-1}$ zapíšeme $(\gamma x + \delta)/(x^2 + bx + c)^j$ jako

$$\tfrac{\gamma}{2} \cdot \tfrac{2x+b}{(x^2+bx+c)^j} + \tfrac{\delta-\gamma b/2}{(x^2+bx+c)^j} = \tfrac{\gamma}{2} \cdot T + e \cdot \tfrac{1/d}{((x/d+b/2d)^2+1)^j} = \tfrac{\gamma}{2}T + eU\ .$$

Integrací substitucí máme, že $\int T = 1/\big((1-j)(x^2 + bx + c)^{j-1}\big)$ pro $j \geq 2$ a $\int T = \log(x^2 + bx + c)$ pro $j = 1$ (na libovolném netriviálním reálném intervalu I). Tím v $\int r(x)$ ve větě 8 dostáváme členy prvního a třetího typu.

Nakonec spočítáme $\int U$. Integrací substitucí máme, že na libovolném netriviálním intervalu I je $\int U = I_j(x/d + b/2d)$, kde $I_j = I_j(y) := \int 1/(y^2 + 1)^j$. Pro $j \in \mathbb{N}$ integrací per partes a derivováním složených funkcí dostaneme vztah

$$\begin{aligned} I_j &= \int y' \cdot \frac{1}{(y^2+1)^j} = \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \int \frac{(y^2+1)-1}{(y^2+1)^{j+1}} \\ &= \frac{y}{(y^2+1)^j} + 2j \cdot I_j - 2j \cdot I_{j+1}\ . \end{aligned}$$

Máme tedy rekurenci $I_1 = \arctan y$ (podle hořejší tabulky) a $I_{j+1} = y/(2j \cdot (y^2+1)^j) - (1 - 1/2j) \cdot I_j$, $j \in \mathbb{N}$. Z toho vyplývá, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $I_j(y) = u(y) + z \cdot \arctan y$, kde $u(y) \in \mathrm{RAC}$ a $z \in \mathbb{Q}$. Protože $\int U = I_j(x/d + b/2d)$, poslední příspěvek k $\int r(x)$ ve větě 8 je prvního a čtvrtého typu. $\square$

Liouvilleova a Rosenlichtova teorie

Ve čtyřicátých letech 19. století francouzský matematik *Joseph Liouville (1809–1882)* vybudoval teorii umožňující dokázat, že některé elementární funkce mají pouze neelementární antiderivace. V sedmdesátých letech 20. století dal této teorii rigorózní podobu americký matematik *Maxwell Rosenlicht (1924–1999)* (viz MR, Integration in Finite Terms, *American Mathematical Monthly* **79** (1972), 963–972). Na jeden speciální případ této teorie se podíváme.

Věta 12 (J. Liouville, 1835) *Nechť $f, g \in \mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$ a $I \subset M(f) \cap M(g)$ je netriviální interval. Potom na intervalu I existuje $\int f \cdot \exp g \in \mathrm{EF} \iff$ existuje $a \in \mathrm{RAC}$, že $f = a' + ag'$.*

Implikace $\Leftarrow$ je triviální, protože $(a \exp g)' = (a' + ag') \exp g$, takže $a \exp g = \int (a' + ag') \exp g = \int f \exp g$ a přitom $a \exp g \in \mathrm{EF}$. Hluboká část Liouvilleovy věty je implikace $\Rightarrow$.

Nechť $p = k_c \prod_{i=1}^{k} p_i \prod_{i=1}^{l} q_i$ je ireducibilní rozklad polynomu $p \neq k_0$ a nechť r je MLP nebo IT. Násobností $m(r,p) \in \mathbb{N}_0$ polynomu r v p rozumíme počet jeho výskytů mezi p_i a q_i.

Lemma 13 (násobnost a derivace) *Když $n := m(r,p)$ je alespoň 1, pak $m(r,p') = n - 1$.*

Důkaz. Nechť $n \geq 1$, p a r jsou jako výše a r je IT. Pak $p = r^n q$, kde polynom $q \neq k_0$ a je součinem několika MLPů a ITů, mezi nimž se r nevyskytuje (q může být konstantní). Pak ale platí, že $p' = r^{n-1}(nr'q+rq')$. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ je kořen polynomu r, takže $r(\alpha) = 0$. Protože $(nr'q+rq')(\alpha) = nr'(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)q'(\alpha) = nr'(\alpha)q(\alpha) \neq 0$ (podle úlohy výše), v ireducibilním rozkladu polynomu $nr'q+rq'$ se r nevyskytuje a $m(r, p') = n-1$. Je-li r MLP, argument je podobný a jednodušší. □

Jako příklad aplikace L.–R. teorie teď dokážeme, že e^{x^2} nemá elementární primitivní funkci.

Důsledek 14 ($\int \exp(x^2) \notin \mathrm{EF}$) *Funkce* $\exp(x^2)$ $(\in \mathcal{C}(\mathbb{R}))$ *nemá elementární primitivní funkci.*

Důkaz. Zde $f = 1$ $(= k_1)$, $g = x^2$ a (podle Liouvilleovy věty) máme rovnici $1 = a' + 2xa$. Nechť ji pro spor $a = p/q$, kde $p, q \in$ POL s $q \neq k_0$, splňuje. Patrně $p \neq k_0$. Když q je konstantní, pak vlastně $a \in$ POL. V $1 = a' + 2xa$ pak ale levá strana má stupeň 0, zatímco pravá má stupeň ≥ 1, což není možné.

Nechť q je nekonstantní polynom a r je nějaký MLP nebo IT z jeho ireducibilního rozkladu a s násobností $m(r, q) =: n \geq 1$. Můžeme předpokládat, že polynomy p a q jsou nesoudělné. Rovnice $1 = a' + 2xa$ přechází v rovnici

$$q^2 - p'q + pq' - 2xpq = 0\,.$$

Násobnost polynomu r v těchto čtyřech členech je po řadě $2n$, $\geq n$, $\underline{n-1}$ (díky lemmatu 13 a nesoudělnosti p a q) a $\geq n$. Minimální násobnost polynomu r v těchto členech je tedy $n-1$ a nabývá se jednoznačně (jen třetím členem), takže levá strana zde není nulová, viz úloha níže, a opět máme spor. $\square$

• *Úloha.* Vysvětlete, proč levá strana v poslední vystavené rovnici není nulová.

DĚKUJI ZA POZORNOST!