Martin Klazar

MA 1, PŘEDNÁŠKA 10, 25. 4. 2024

RIEMANNŮV INTEGRÁL. PRIMITIVNÍ FUNKCE

Důkaz věty 15 v minulé přednášce, že každá funkce $f \in \mathcal{C}(I)$, pro netriviální interval I, má antiderivaci, byl celkem složitý. Dnes to dokážeme jednodušeji Riemannovým integrálem. Omezíme se na intervaly $I = [a, b]$, $a < b$.

Riemannův integrál

• *Riemannovy součty.* Dělení $\overline{a}$ (intervalu I) je $n+1$-tice $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, kde $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$. Jeho norma $\|\overline{a}\| > 0$ je největší délka podintervalu $a_i - a_{i-1}$, $i \in [n]$. Rozdělení (intervalu I) je dvojice $(\overline{a}, \overline{t})$, kde $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ je dělení intervalu I a n-tice $\overline{t} = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ splňuje pro každé $i \in [n]$, že $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$.

Definice 1 (Riemannovy součty) *Nechť $f \in \mathcal{F}([a, b])$ & $(\overline{a}, \overline{t})$ je rozdělení intervalu $[a, b]$. Riemannův součet pro $(\overline{a}, \overline{t})$ & f je součet $R(\overline{a}, \overline{t}, f) := \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i)$ ($\in \mathbb{R}$).*

Je to plocha sloupcového grafu $\bigcup_{i=1}^{n} [a_{i-1}, a_i] \times I(0, f(t_i))$, který se skládá z n obdélníků s rozměry $(a_i - a_{i-1}) \times |f(t_i)|$. Sloupce pod osou x, tedy s $f(t_i) < 0$, mají zápornou plochu.

• *Riemannův integrál.* Zavedeme Riemannův integrál.

Definice 2 (Riemannův $\int$) $f \in \mathcal{F}([a, b])$. *Existuje-li pro $\forall$ posl. $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ rozdělení intervalu $[a, b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ limita $\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) \in \mathbb{R}$, označíme ji $\int_a^b f$ a nazveme ji (Riemannovým) integrálem funkce f od a do b. $\int_a^a f := 0$.*

Kdybychom měli $\lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) \neq \lim R(\overline{b_n}, \overline{u_n}, f)$, spojená posloupnost $\big((\overline{a_1}, \overline{t_1}), (\overline{b_1}, \overline{u_1}), (\overline{a_2}, \overline{t_2}), (\overline{b_2}, \overline{u_2}), \dots\big)$ dává spor.

• *Úloha.* Jak?

Když $[a,b] \subset M(f)$, pak místo $\int_a^b f \mid [a,b]$ píšeme jednodušeji $\int_a^b f$. *Bernhard Riemann (1826–1866)*, který patřil k největším matematikům 19. století, zemřel ve 40 letech na TBC na březích Lago Maggiore.

Tvrzení 3 (vlastnosti R. $\int$) *R. integrál má tři vlastnosti.*
(1) *Když $c \in [a,b]$ a existují integrály $\int_a^c f$ & $\int_c^b f$, pak existuje $\int_a^b f$ & $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
(2) *Když $f \le g$ na $[a,b]$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$, pokud tyto integrály existují.*
(3) $\int_a^b k_c = (b-a)c$.

• *Úloha.* Dokažte tyto výsledky pomocí Riemannových součtů.

Jsou-li $\overline{a}$ & $\overline{b}$ dělení intervalu $[a,b]$, pak $\overline{a}$ <u>zjemňuje</u> $\overline{b}$, pokud $\overline{b} \subset \overline{a}$.

Tvrzení 4 (stabilita R. $\int$) *Nechť $f \in \mathcal{F}([a,b])$ má $\int_a^b f$ a $\overline{b}$ je dělení intervalu $[a,b]$. <u>Pak</u> pro každé ε existuje takové dělení $\overline{a}$ intervalu $[a,b]$, že $\overline{a}$ zjemňuje $\overline{b}$ a pro každé rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ je $\big|\int_a^b f - R(\overline{a}, \overline{t}, f)\big| \le \varepsilon$.*

• *Úloha.* Dokažte toto tvrzení. Návod: kdyby existovalo ε, že pro každé zjemnění $\overline{a}$ dělení $\overline{b}$ existují body $\overline{t}$, že …, potom … .

• *Riemannův integrál spojité funkce.*

Věta 5 (spojitá funkce má $\int_a^b$) $\forall\, f \in \mathcal{C}([a,b])\ \exists \int_a^b f$.

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Stačí dokázat, že pro každou posloupnost $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ rozdělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$ je posl. $(R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f))$ Cauchyova. Buď dáno ε. Ze 6. př. víme, že f je stejnoměrně spojitá. Vezmeme proto takové δ, že $x, y \in [a,b]$, $|x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. Nechť $((\overline{a_n}, \overline{t_n}))$ je zmíněná posloupnost. Vezmeme n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow \|\overline{a_n}\| \le \delta$. Nechť $m, n \ge n_0$ jsou dva libovolné indexy. Definujeme rozdělení $(\overline{b}, \overline{u})$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\overline{b} = \overline{a_m} \cup \overline{a_n}$ a body v $\overline{u}$ jsou libovolné. Nechť $\overline{b} = (a = b_0 < b_1 < \cdots < b_k = b)$ a $b_0 = b_{i_0} < b_{i_1} < \cdots < b_{i_l} = b_k$ jsou všechny členy v $\overline{b}$, které leží v $\overline{a_m}$. Pak $w = R(\overline{b}, \overline{u}, f) - R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f)$ je

$$\sum_{r=1}^{l} \Big(\sum_{s=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_s - b_{s-1}) \cdot f(u_s) - (b_{i_r} - b_{i_{r-1}}) \cdot f(t_{m,r}) \Big) .$$

Ale $(\ldots) = \sum_{s=i_{r-1}+1}^{i_r} (b_s - b_{s-1})(f(u_s) - f(t_{m,r}))$, což v $|\cdots|$ je $\le \varepsilon(b_{i_r} - b_{i_{r-1}})$. Tedy $|w| \le \varepsilon \sum_{r=1}^{l} (b_{i_r} - b_{ir-1}) = \varepsilon(b-a)$. Totéž platí, když index m nahradíme indexem n, takže $|R(\overline{a_m}, \overline{t_m}, f) - R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f)| \le 2\varepsilon(b-a)$ a posloupnost R. součtů je Cauchyova. $\square$

Tvrzení 6 (integrál u c) *Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ & $c \in [a,b]$.* *<u>Pak</u> $\int_a^x f = \int_a^c f + f(c)(x-c) + o(x-c)$ $(x \to c)$.*

Důkaz. Nechť je dáno ε. Protože f je v c spojitá, existuje δ, že $x \in U(c,\delta) \cap [a,b] \Rightarrow f(c) - \varepsilon \le f(x) \le f(c) + \varepsilon$. Nechť navíc $x \le c$, případ s $x \ge c$ je podobný. Podle tvrzení 3 pro $\int_a^x f - \int_a^c f = -\int_x^c f$ máme, že

$$\int_a^x f - \int_a^c f \le \int_x^c (\varepsilon - f(c)) = f(c)(x-c) + \varepsilon(c-x) \text{ i}$$
$$\int_a^x f - \int_a^c f \ge \int_x^c (-\varepsilon - f(c)) = f(c)(x-c) - \varepsilon(c-x) .$$

Tím je tvrzení dokázáno. $\square$

Spojitá funkce má antiderivaci, podruhé

Zde je druhý důkaz věty 15 v minulé přednášce.

Věta 7 (existence antiderivace) *f je v $\mathcal{C}([a,b])$ a pro každé $x \in [a,b]$ nechť $F(x) := \int_a^x f$. Pak $F = \int f$.*

Důkaz. Nechť f, a, b jsou, jak uvedeno, a je dáno $c \in [a,b]$. Pak podle tvrzení 6 pro $x \in [a,b]$, $x \neq c$, se

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c} = f(c) + o(1) \quad (x \to c)$$

a $F'(c) = f(c)$. $\square$

Minule jsme (pro důkaz existence PF k $f \in \mathcal{C}([a,b])$) potřebovali skoro 6 stran, nyní asi 3.

Primitivní funkce: Darbouxova vlastnost

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ má Darbouxovu vlastnost, pokud pro každý interval $I \subset M$ i $f[I]$ je interval. Jak víme, každá $f \in \mathcal{C}$ má Darbouxovu vlastnost.

Věta 8 (derivace mají DV) *Když $f \in \mathcal{F}(I)$ má primitivní funkci, pak f má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Nechť $a < b$, funkce $f, F \in \mathcal{F}([a,b])$, $F = \int f$ a $f(a) < c < f(b)$, případ s $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Uvážíme funkci $G(x) := F(x) - cx$. Patrně $G' = F' - k_c = f - k_c$ a tedy G je spojitá. Podle věty 8 v př. 6 má G v nějakém $d \in [a,b]$ minimum. Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$ plyne podle tvrzení 5 v př. 8, že $d \in (a,b)$. Podle věty 4 v př. 7 se $G'(d) = f(d) - c = 0$, takže $f(d) = c$. $\square$

Z věty hned plyne, že třeba funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na žádném netriviálním intervalu I, jehož $I^0 \ni 0$, primitivní funkci. *Jean-Gaston Darboux (1842–1917)* byl francouzský matematik.

Výpočty primitivních funkcí

- *Linearita* PF. V dalším je $I \subset \mathbb{R}$ netriviální interval.

Tvrzení 9 (linearita $\int$) *Nechť $f, g, F, G \in \mathcal{F}(I)$, $F = \int f$ & $G = \int g$. Pak $aF + bG = \int(af + bg)$.*

Důkaz. Pokud f, g, F, G a I jsou, jak uvedeno, pak linearita derivování dává, že $(aF + bG)' = aF' + bG' = af + bg$. $\square$

Například z $x^2/2 = \int x$ a $-\cos x = \int \sin x$ tak hned vidíme, že $-2\cos x + x^2/2 = \int(2\sin x + x)$.

- *Integrace per partes.* Tento vzorec je důležitější, než se zdá.

Věta 10 (per partes) *Nechť $f, g, F, G \in \mathcal{F}(I)$, $F = \int f$ a $G = \int g$. Pak $\int fG = FG - \int Fg$, je-li pravá strana definovaná – když $H = \int Fg$, pak $FG - H = \int fG$.*

Důkaz. Plyne to hned z Leibnizova vzorce a linearity derivování: $(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG$. $\square$

Tento vzorec lze psát i jako $\int F'G = FG - \int FG'$. Známe-li primitivní funkci k FG', máme primitivní funkci k $F'G$. Derivace přeskočí z F na G. Například $\int \log x = \int x' \log x = x \log x - \int x(\log x)'$ $= x\log x - \int \frac{x}{x} = x\log x - \int 1 = x\log x - x$. Nebo $\int x \sin x$

$= \int x(-\cos x)' = -x\cos x + \int x'\cos x = -x\cos x + \int \cos x = -x\cos x + \sin x$. Správnost obou výsledků se snadno zkontroluje zderivováním.

• *Integrace substitucí.* Jde o dva vzorce pro výpočet antiderivace. I a J jsou netriviální reálné intervaly.

> **Věta 11 (substituce)** *$g, g' \in \mathcal{F}(J)$, $g[J] \subset I$ a $f \in \mathcal{F}(I)$.*
> *(1) $F = \int f \Rightarrow F(g) = \int f(g) \cdot g'$.*
> *(2) $g[J] = I$, $g' \neq 0$ a $G = \int f(g) \cdot g' \Rightarrow G(g^{-1}) = \int f$.*

Důkaz. 1. Derivace složeniny dává $(F(g))' = F'(g) \cdot g' = f(g) \cdot g'$.

2. Podle věty 8 má g' Darbouxovu vlastnost. Na I tak buď $g' > 0$, anebo $g' < 0$, a g buď roste, anebo klesá. Podle části 2 věty 22 v př. 6 má g inverz $g^{-1} \in \mathcal{C}(I)$. Podle vzorců pro derivaci složeniny a inverzu, což jsou věty 17 a 18 v př. 7, se

$$\big(G(g^{-1})\big)' = G'(g^{-1}) \cdot (g^{-1})' = f\Big(\underbrace{g(g^{-1})}_{=\mathrm{id}_I}\Big) \cdot \cancel{g'(g^{-1})} \cdot \frac{1}{\cancel{g'(g^{-1})}} = f.$$

$\square$

Uvedeme příklady na oba vzorce.

Příklad 1. Pokud $F = \int f$ na I a $a, b \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$, pak podle prvního vzorce je

$$\tfrac{F(ax+b)}{a} = \int f(ax+b) \ \text{ na } J := (I - b)/a\ .$$

Příklad 2. Nechť $I = (-1, 1)$, $f = \sqrt{1-x^2} \,|\, I$, $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $g = \sin x \,|\, J$. Nalezneme $\int f$. Integrace per partes dává $\int f(g) \cdot g' = \int \cos^2 x = \int (\sin x)' \cos x = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (\cos x)' = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x$, a proto

$\int f(g)\cdot g' = \int \cos^2 x = (\sin x\cdot\cos x + x)/2 =: G(x)$. Podle druhého vzorce a díky tomu, že na J se $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, máme, že

$$\int f = \int \sqrt{1-x^2} = G(g^{-1}) = \big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big)/2\ .$$

Kontrola derivováním: $\big(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\big)' = \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} - \frac{x^2/2}{\sqrt{\cdots}} + \frac{1/2}{\sqrt{\cdots}} = \frac{1-x^2}{\sqrt{\cdots}} = \sqrt{1-x^2}$.

Riemannův integrál a primitivní funkce

Následující vztah plyne hned z věty 7.

Důsledek 12 (spojité funkce) *Když $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a $F = \int f$, pak $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Důkaz. Z věty 7 víme, že $G(x) = \int_a^x f$ je primitivní k f. Podle věty 14 v minulé přednášce se funkce G a F liší jen o konstantu, takže $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f - 0 = \int_a^b f$. □

Obecněji platí následující slabá forma *Základní věty analýzy 2.*

Věta 13 (obecněji) *Nechť jsou $F, f \in \mathcal{F}([a,b])$, $F = \int f$ a existuje $\int_a^b f$. Potom $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Důkaz. Nechť F a f jsou, jak uvedeno, a $(\overline{a_n})$ je posloupnost dělení intervalu $[a,b]$ s $\lim \|\overline{a_n}\| = 0$, $\overline{a_n} = (a_{n,0}, \ldots, a_{n,k_n})$. Podle Lagrangeovy VSH pro každé $i \in [k_n]$ existuje $t_{n,i} \in (a_{n,i-1}, a_{n,i})$, že $F(a_{n,i}) - F(a_{n,i-1}) = F'(t_{n,i})(a_{n,i} - a_{n,i-1}) = f(t_{n,i})(a_{n,i} - a_{n,i-1})$. Pak ale, s $\overline{t_n} := (t_{n,1}, \ldots, t_{n,k_n})$, pro každé n je

$$F(b) - F(a) = \textstyle\sum_{i=1}^{k_n} \big(F(a_{n,i}) - F(a_{n,i-1})\big) = R(\overline{a_n},\ \overline{t_n},\ f)$$

a $\int_a^b f = \lim R(\overline{a_n}, \overline{t_n}, f) = \lim(F(b) - F(a)) = F(b) - F(a)$. □

Jak jsme naznačili, příště asi dokážeme o něco silnější verzi této věty. Předešlý důkaz osvětluje definici R. součtů, sice proč v rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ intervalu $[a, b]$ místo obecného $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ nestačí třeba $t_i = a_{i-1}$ – důkaz by nefungoval.

Plocha pod grafem nezáporné funkce

Tuto plochu definujeme jako supremum takzvaných dolních součtů.

Definice 14 (dolní součty) *Pro $f \in \mathcal{F}([a, b])$, děl. $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ int. $[a, b]$ a $m_i = \inf_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x)$, $i \in [n]$, je dolní součet $s(\overline{a}, f) := \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \cdot m_i$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.*

- *Úloha.* Když $\overline{a}$ zjemňuje $\overline{b}$, tak $s(\overline{a}, f) \geq s(\overline{b}, f)$.

Definice 15 (PG) *Pro funkci $f \in \mathcal{F}([a, b])$, kde $f \geq 0$, je plocha pod G_f $\mathrm{PG}(f) := \sup\big(\{s(\overline{a}, f) \mid \overline{a}$ je dělení $[a, b]\}\big)$.*

$\mathrm{PG}(f)$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ vždy existuje a je to supremum ploch sloupcových grafů úplně obsažených v množině $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ $(\subset \mathbb{R}^2)$.

Věta 16 (integrál a PG) *Nechť $f \in \mathcal{F}([a, b])$, $f \geq 0$ a je omezená a existuje $\int_a^b f$. Potom $\mathrm{PG}(f) = \int_a^b f$.*

Důkaz. Nechť f, a, b jsou, jak uvedeno, a $f \leq c$. Pak patrně $P := \mathrm{PG}(f) \leq c(b - a)$. Buď dáno ε. Vezmeme dělení $\overline{a}$ intervalu $[a, b]$, že $P - \varepsilon \leq s(\overline{a}, f) \leq P$. Podle tvrzení 4 dělení $\overline{a}$ zjemníme takovým dělením $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_n)$, že pro každé rozdělení $(\overline{b}, \overline{t})$ je $|\int_a^b f - R(\overline{b}, \overline{t}, f)| \leq \varepsilon$. Podle úlohy výše je $s(\overline{a}, f) \leq s(\overline{b}, f) \leq P$. Pro $i \in [n]$ a $m_i = \inf_{x \in [b_{i-1}, b_i]} f(x)$ $(\in \mathbb{R})$ vezmeme $t_i \in [b_{i-1}, b_i]$, že $m_i \leq f(t_i) \leq m_i + \varepsilon$. Pak $|R(\overline{b}, \overline{t}, f) - s(\overline{b}, f)| \leq \varepsilon(b-a)$ a $|s(\overline{b}, f) - P| \leq \varepsilon$. Tedy $|\int_a^b f - P|$ je nejvýše

$$|\textstyle\int_a^b f - R(\overline{b}, \overline{t}, f)| + |R(\overline{b}, \overline{t}, f) - s(\overline{b}, f)| + |s(\overline{b}, f) - P|$$

$\leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) + \varepsilon = \varepsilon(b-a+2)$. Tudíž $\int_a^b f = P = \mathrm{PG}(f)$. □

Předpoklad omezenosti f lze vynechat: později ukážeme, že neomezená funkce nemá R. integrál. Dostali jsme vzorec pro výpočet plochy pod grafem spojité funkce.

Důsledek 17 (PG spojité funkce) $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f \geq 0$. *<u>Pak</u> f má antiderivaci a pro každou $F = \int f$ platí, že $F(b) - F(a) = \mathrm{PG}(f)$.*

Důkaz. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Je jistě omezená. Podle vět 5 a 7 funkce f má $\int_a^b f$ a primitivní funkci. Podle věty 13 a poslední věty pro každou $F = \int f$ se $F(b) - F(a) = \int_a^b f = \mathrm{PG}(f)$. □

Například pro $f = x^2 \,|\, [0,1]$ vezmeme $F = x^3/3 \,|\, [0,1]$ a dostaneme, že $\mathrm{PG}(f) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Následující příklad ukazuje nedostatečnost R. integrálu. Antiderivace dává správnou hodnotu plochy pod grafem funkce, ta ale nemá Riemannův integrál.

Tvrzení 18 (nedostatečnost R. $\int$) *Nechť $f \in \mathcal{F}([0,1])$ je dána zúžením $x^{-1/2} \,|\, (0,1]$ a hodnotou $f(0) = 0$ a nechť $F(x) = 2\sqrt{x} \,|\, (0,1]$. <u>Pak</u>*

$$F = \textstyle\int f \,|\, (0,\, 1] \ \text{ a } \ \mathrm{PG}(f) = 2 = F(1) - \lim_{x \to 0} F(x)\,,$$

ale integrál $\int_0^1 f$ neexistuje.

Důkaz. Nechť f a F jsou, jak uvedeno. Je jasné, že $F = \int f \,|\, (0,\,1]$ a že $F(1) - \lim_{x\to 0} F(x) = 2$. Spočítáme, že i $\mathrm{PG}(f) = 2$. Pro $a \in (0,1)$ nechť f_a je $f \,|\, [a,1]$. Pak se podle předešlého důsledku $\mathrm{PG}(f)$ rovná

$$\sup_{0<a<1} \big(a \cdot 0 + \mathrm{PG}(f_a)\big) = \sup_{0<a<1} (F(1) - F(a)) = F(1) - 0 = 2\,.$$

Protože $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, pro každé dělení $\overline{a} = (a_0, \dots, a_n)$ intervalu $[0,1]$ a každé $c > 0$ můžeme volbou $t_1 \in (0, a_1]$ blízko u 0 získat rozdělení $(\overline{a}, \overline{t})$ s $R(\overline{a}, \overline{t}, f) \ge c$. $\int_0^1 f$ tedy neexistuje. □

Tento problém Riemannova integrálu odstraníme jeho vylepšením na Henstock–Kurzweilův integrál.

Důkaz případu $\frac{\dots}{\infty}$ v LHP 2 Newtonovým integrálem

- *Newtonův integrál.*

Definice 19 (Newtonův integrál) *Nechť $A < B$ jsou v $\mathbb{R}^*$, funkce $f, F \in \mathcal{F}((A,B))$ a $F = \int f$. Pak definujeme Newtonův integrál* (N) $\int_A^B f := \lim_{x\to B} F(x) - \lim_{x\to A} F(x)$, *jsou-li obě limity vlastní.*

Existuje-li tento integrál, píšeme $f \in \mathcal{N}(A,B)$ a řekneme, že funkce f je (na intervalu (A,B)) newtonovsky integrovatelná. Pro $A \le K < L \le B$ místo (N) $\int_K^L f \,|\, (K,L)$ píšeme jednodušeji (N) $\int_K^L f$.

- *Úloha.* Pokud (N) $\int_A^B f$ existuje, nezávisí na volbě funkce F.

- *Úloha.* Když $f, g \in \mathcal{N}(A,B)$, pak $af + bg \in \mathcal{N}(A,B)$ & (N) $\int_A^B (af + bg) = a \cdot$ (N) $\int_A^B f + b \cdot$ (N) $\int_A^B g$.

Tvrzení 20 (monotonie N. $\int$) *f, g jsou v $\mathcal{N}(A, B)$ & $f \leq g$. Pak* (N) $\int_A^B f \leq$ (N) $\int_A^B g$.

Důkaz. Nechť $F = \int f$, $G = \int g$ a $c < d$ jsou v (A, B). Použijeme Lagrangeovu VSH pro funkci $F - G$ a interval $[c, d]$. Tedy existuje $e \in (c, d)$, že $F(d) - G(d) - (F(c) - G(c)) = (F - G)'(e) \cdot (d - c)$ $= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d - c) = (f(e) - g(e)) \cdot (d - c) \leq 0$. Proto $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$. Nerovnost se zachová při limitních přechodech $c \to A$ a $d \to B$ a dostáváme kýženou nerovnost. $\square$

• *Úlohy.* Nechť $f, g \in \mathcal{N}(A, B)$ a $|f| \leq g$. Pak $\left|(\mathrm{N}) \int_A^B f\right| \leq$ (N) $\int_A^B g$. Když $g \geq 0$, tak (N) $\int_A^B g \geq 0$.

Tvrzení 21 (aditivita N. $\int$) *$f \in \mathcal{N}(A, B)$, $A < c < B$. Pak* $\exists$ (N) $\int_A^c f$ *a* (N) $\int_c^B f$ *a* (N) $\int_A^B f =$ (N) $\int_A^c f +$ (N) $\int_c^B f$.

Důkaz. Nechť f, A, B a c jsou, jak uvedeno, a nechť $F = \int f$. Protože $F'(c) = f(c)$, funkce F je v c spojitá a $\lim_{x \to c^-} F(x)$ $= \lim_{x \to c^+} F(x) = F(c)$. Tedy (N) $\int_A^c f = F(c) - \lim_{x \to A} F(x)$ a (N) $\int_c^B f = \lim_{x \to B} F(x) - F(c)$. Odtud máme, že (N) $\int_A^c f +$ (N) $\int_c^B f = \lim_{x \to B} F(x) - \lim_{x \to A} F(x) =$ (N) $\int_A^B f$. $\square$

• *Případ* $\frac{\cdots}{\infty}$ LHP 2. Nejprve dokážeme jeden asymptotický vztah mezi Newtonovými integrály.

Tvrzení 22 (dva N. $\int$y) *Nechť f, g jsou v $\mathcal{F}((a, b)) \cap \mathcal{N}(x, b)$ pro $a < x < b$, $g > 0$, $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ a* $\lim_{x \to a}$ (N) $\int_x^b g = +\infty$. *Pak* (N) $\int_x^b f = o\big((\mathrm{N}) \int_x^b g\big)$ *$(\ldots)$.*

Důkaz. Nechť f a g jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. První o říká, že pro nějaké $\delta \le b-a$ platí, že $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot g(x)$. Díky limitě $\exists\, \theta \le \delta$, že $x \in (a, a+\theta) \Rightarrow |(\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^{b} f| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g$. Pak pro každé $x \in (a, a+\theta)$ se podle tvrzení 21 $|(\mathrm{N}) \int_x^b f|$ rovná

$$\left|(\mathrm{N}) \int_x^{a+\delta} f + (\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^{b} f\right| \le \left|(\mathrm{N}) \int_x^{a+\delta} f\right| + \left|(\mathrm{N}) \int_{a+\delta}^{b} f\right|.$$

Podle obou $\Rightarrow$ a úloh výše to je $\le \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^{a+\delta} g + \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g \le \varepsilon \cdot (\mathrm{N}) \int_x^b g$. $\square$

Věta 23 (LHP 2, $\frac{\dots}{\infty}$) *Nechť $b < c$, $f, g, f', g' \in \mathcal{F}((b, c))$, $g' \neq 0$, $\lim_{x \to b} g(x) = -\infty$ a existuje vlastní $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom se $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(\in \mathbb{R})$.*

Důkaz. Nechť b, c, f a g jsou, jak uvedeno, takže $g' > 0$ (úloha níže). Nechť $L = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a nejprve $L = 0$, takže $f'(x) = o(g'(x))$ $(x \to b)$. Předchozí tvrzení dává $(\mathrm{N}) \int_x^c f' = o\big((\mathrm{N}) \int_x^c g'\big)$ $(x \to b)$. Tedy $f(x) = f(c) - o(1)(g(c) - g(x))$ a $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(x)} + o(1)(1 - \frac{g(c)}{g(x)}) = o(1) + o(1)(1 - o(1)) = o(1)$. Proto $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = L$. Pro obecné $L \in \mathbb{R}$ vezmeme $h(x) = f(x) - Lg(x)$, pak $\lim_{x \to b} \frac{h'(x)}{g'(x)} = 0$. Podle už dokázaného případu je $0 = \lim_{x \to b} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} - L$ a $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. $\square$

Důkaz jsme převzali z učebnice analýzy I. I. Ljaško, V. F. Emel'janov a A. K. Bojarčuk, *Osnovy klassičeskogo i sovremennogo Matematičeskogo Analiza* (Kijev, 1988) (str. 206–7). Věta platí i pro limity $\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, důkaz ale odsouváme do **K**.

- *Úloha.* Proč je $g' > 0$ na (b, c)?

• *Úloha.* Ukažte, že věta platí i pro $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$ a pro definiční obory (c, b), $P(b, \delta)$, $(c, +\infty)$ a $(-\infty, c)$.

• *Úloha.* $\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\cot x} = ?$

DĚKUJI ZA POZORNOST!